# 重庆理工大学本科生课程考试

# 参考答案及评分标准

2021 —2022 学年第二学期

课程编号：10573　　　　课程名称：高等数学【机电（2）】　　　试卷类别：A 卷

**一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）**

| （1） | （2） | （3） | （4） | （5） |
|---|---|---|---|---|
| **B** | **B** | **C** | **A** | **D** |

**二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）**

| （6） | （7） | （8） | （9） | （10） |
|---|---|---|---|---|
| $y=\cos x+C_1x^2+C_2x+C_3$ | $y''-y'=0$ | $x(ax+b)e^x$ | $z=2(x^2+y^2)$ | $\frac{2}{3}$ |
| （11） | （12） | （13） | （14） | （15） |
| $-2$ | 3 | $\int_1^2 dx\int_1^x f(x,y)dy$ | $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n$ | 2 |

三、解答题（本大题共 5 小题，每小题 12 分，总计 60 分）

16. **解答**：（1） 由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=y+2xf'$ ，$\frac{\partial z}{\partial y}=x-2yf'$ 　　**（4 分）**

故：　$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2$ 　　**（2 分）**

（2）由 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^{xy}$ 　则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=2xe^{xy}+x^2ye^{xy}$ 　　**（4 分）**

又 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ ， 故 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$ =2 　　**（2 分）**

17. **解答**：设 $F(x,y,z)=e^z-xyz+2x-y-1$，

则 $F_x=2-yz$，$F_y=-xz-1$， $F_z=e^z-xy$ 　　**（2 分）**

（1） $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz-2}{e^z-xy}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz+1}{e^z-xy}$ **（3 分）**

故 $dz=\frac{(yz-2)dx+(xz+1)dy}{e^z-xy}$ **（2 分）**

(2) $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2-yz,-xz-1,e^z-xy)$

$\vec{n}\Big|_{(1,2,0)}=(2,-1,-1)$ **（2 分）**

所以在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为：$2x-y-z=0$ **（3 分）**

18. **解答：** （1） $L$ 的方程为 $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-4}$，

即 $L$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=1 \\ y=3t \\ z=-4t+2 \end{cases}$ $(0\le t\le 1)$ **（2 分）**

$\int_L(x-2y-z)ds=\int_0^1(1-6t+4t-2)\sqrt{0+9+16}dt=5\int_0^1(-2t-1)dt=-10$ **（3 分）**

（2） 令 $P=2x^2-y,\ Q=xy-1$，由格林公式得

$\oint_L(2x^2-y)dx+(xy-1)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint\limits_D(y+1)dxdy=\iint\limits_D ydxdy+\iint\limits_D dxdy$ **（4 分）**

$=0+\pi=\pi$ **（3 分）**

**或：** $\oint_L(2x^2-y)dx+(xy-1)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint\limits_D(y+1)dxdy$ **（4 分）**

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(\rho\sin\theta+1)\rho d\rho=\pi$ **（3 分）**

19. **解答：** 令 $P=2+xy^2,\ Q=0,\ R=zx^2$，

$\Omega$ 是介于 $z=0$ 与 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\le 4$.

由于 $\Sigma$ 取的是 $\Omega$ 的整个边界曲面的外侧，故由高斯公式有

$I=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$ **（6 分）**

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_0^3\rho^3dz=6\pi\int_0^2\rho^3d\rho=24\pi$ **（6 分）**

20. .**解答：**（1）令 $a_n=\frac{n}{3^n}$，

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{3}$，所以收敛半径 $R=3$ **（3 分）**

当 $x=3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散；

当 $x=-3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散；

所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}x^n$ 收敛域为 $(-3,3)$ **（3 分）**

（2）设和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}x^n$， $x\in(-3,3)$

当 $x\in(-3,3)$ 时， $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}x^{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^n}{3^n}\right)'=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}\right)'$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{x}{3})^n=\dfrac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}=\dfrac{x}{3-x}\ (-3<x<3)$ **（4 分）**

于是 $S(x)=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}\right)'=x\left(\dfrac{x}{3-x}\right)'=\dfrac{3x}{(3-x)^2}\ (-3<x<3)$ **（2 分）**

**四、应用题（本大题共 1 小题，总计 10 分）**

**解答：**先求驻点，令 $\begin{cases}T_x(x,y)=2-2x=0\\T_y(x,y)=4-4y=0\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$， 即驻点为 $(1,1)$ **（4 分）**

则 $A=T_{xx}(1,1)=-2,\ B=T_{xy}(1,1)=0,\ C=T_{yy}(1,1)=-4$

因为 $A=-2<0,\ AC-B^2=8>0$，所以 $(1,1)$ 是极大值点。 **（4 分）**

这是唯一可能的极值点，因为问题本身可知温度最高一定存在，所以温度最高就在这个可能的极值点取得，也就是在铁板内，在点 $(1,1)$ 处温度最高，其最高温度为 $T(1,1)=3$。**（2 分）**