

重庆理工大学本科生课程考试试卷

2020 ~ 2021 学年第 2 学期

开课学院 理学院 课程名称 高等数学【(2) 机电】 半期 考核方式 闭卷
考试时间 120 分钟 A 卷 共 _____ 页第 _____ 页
考生姓名 _____ 考生班级 _____ 考生学号 _____

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，总计 30 分）

1. 微分方程 $x(y''')^2 + 2y' + 3y^4 = 0$ 的阶数为 () 【答案】C

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ 的通解是 () 【答案】B

(A) $e^y + e^x = C$ (B) $e^y - e^x = C$ (C) $e^{-y} - e^x = C$ (D) $e^y - e^{-x} = C$

3. 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ ，且 $f(0) = 0$ ， $f'(0) = 1$ ，则 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = ()$

【答案】C

(A) 0 (B) $\frac{1}{e}$ (C) 1 (D) e

4. 原点到平面 $3x - 2y + 6z + 14 = 0$ 的距离 $d = ()$ 【答案】B

(A) 7 (B) 2 (C) 14 (D) $\sqrt{17}$

5. 曲线 $\begin{cases} x - y^2 + z = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ 在 xoz 面上的投影曲线为 () 【答案】A

(A) 直线 (B) 抛物线 (C) 圆 (D) 点

6. 曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 2)$ 的切线方程为 () 【答案】B

(A) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{2}$ (B) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$

(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{0}$ (D) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{1}$

7. 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + 2y^6} = ()$ 【答案】D

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) ∞ (D) 不存在

重庆理工大学本科生课程考试试卷

2020 ~ 2021 学年第 2 学期

开课学院 理学院

课程名称 高等数学【(2) 机电】 半期

考核方式 闭卷

考试时间 120 分钟

A 卷

共 _____ 页第 _____ 页

考生姓名 _____

考生班级 _____

考生学号 _____

8. 函数 $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处() 【答案】C

(A) 不连续且偏导数存在

(B) 不连续且偏导数不存在

(C) 连续且偏导数存在

(D) 连续且偏导数不存在

9. 曲面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 12$ 上的点 $M(-1, 0, 3)$ 处的切平面与平面 $z = 0$ 的夹角是 ()

【答案】B

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

10. 函数 $u = xy^2z$ 在点 $P(1, -1, 2)$ 处方向导数的最大值为() 【答案】D

(A) $\sqrt{6}$

(B) 3

(C) $\sqrt{20}$

(D) $\sqrt{21}$

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 总计 10 分)

11. 微分方程 $y'' - y = 2xe^x$ 的一特解可设为 $y^* =$ _____. 【答案】 $x(ax + b)e^x$

12. 设 $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, 则 $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} =$ _____. 【答案】 $2\sqrt{2}$

13. 将 xoz 面上的抛物线 $z^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面方程是 _____. 【答案】 $y^2 + z^2 = 2x$

14. 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy} + 4 - 2} =$ _____. 【答案】 4

15. 设函数 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} =$ _____. 【答案】 $4e$

三、解答题 (本大题共 5 小题, 每小题 10 分, 总计 50 分)

16. 求微分方程的通解:

(1) $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$

(2) $xy'' + y' + x = 0$

重庆理工大学本科生课程考试试卷

2020 ~ 2021 学年第 2 学期

开课学院 理学院 课程名称 高等数学【(2) 机电】 半期 考核方式 闭卷
考试时间 120 分钟 A 卷 共 _____ 页第 _____ 页
考生姓名 _____ 考生班级 _____ 考生学号 _____

【答案】

(1) 令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$,

于是 $u + x \frac{du}{dx} = u + \tan u$, 即 $\cot u du = \frac{1}{x} dx$

两端积分得 $\ln |\sin u| = \ln |x| + C'$, 即 $\sin u = Cx$,

故所求通解为: $\sin \frac{y}{x} = Cx$

(2) 令 $y' = p$, 则, $y'' = \frac{dp}{dx}$

于是 $\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x} p = -1$

则 $p = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int -e^{\frac{1}{x}} dx + C_1 \right) = \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{2} x^2 + C_1 \right) = \frac{C_1}{x} - \frac{1}{2} x$

故所求通解为: $y = -\frac{1}{4} x^2 + C_1 \ln |x| + C_2$

17、过点 $M(1, 12, 9)$ 作平面 $x + 3y + 3z - 26 = 0$ 的垂线, 求该垂线的直线方程及垂足的坐标.

【答案】

平面 $x + 3y + 3z - 26 = 0$ 的法向量 $\vec{n} = (1, 3, 3)$, 于是其垂线的方向向量 $\vec{s} = (1, 3, 3)$

故所求的直线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-12}{3} = \frac{z-9}{3}$

即参数方程为 $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 12+3t \\ z = 9+3t \end{cases}$, 代入平面方程得: $t = -2$

故垂足为 $(-1, 6, 3)$

18、设二元函数 $z = x^2 y + \frac{x}{y}$, 求: (1) $dz|_{x=1, y=1}$; (2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{x=1, y=1}$.

【答案】

重庆理工大学本科生课程考试试卷

2020 ~ 2021 学年第 2 学期

开课学院 理学院 课程名称 高等数学【(2) 机电】 半期 考核方式 闭卷
考试时间 120 分钟 A 卷 共 _____ 页第 _____ 页
考生姓名 _____ 考生班级 _____ 考生学号 _____

(1) 由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - \frac{x}{y^2}$

于是 $dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} dx + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} dy = 3dx$

(2) 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = 2x - \frac{1}{y^2}$ 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 1$

19、(1) 设 $z = f(x, x^y + y)$, f 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) 设 $e^z - xyz = 1$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

【答案】

(1) $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + yx^{y-1}f'_2$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^y \ln x + 1)f'_2$$

(2) 令 $F(x, y, z) = e^z - xyz - 1$,

则 $F_x(x, y, z) = -yz$, $F_y(x, y, z) = -xz$, $F_z(x, y, z) = e^z - xy$

故 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{e^z - xy}$

20、求二元函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值

【答案】

先求驻点, 令 $\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 - y = 0 \\ f_y(x, y) = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{12} \end{cases}$

即驻点为 $(0, 0)$, $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$

重庆理工大学本科生课程考试试卷

2020 ~ 2021 学年第 2 学期

开课学院 理学院 课程名称 高等数学【(2) 机电】 半期 考核方式 闭卷
考试时间 120 分钟 A 卷 共 _____ 页第 _____ 页
考生姓名 _____ 考生班级 _____ 考生学号 _____

为了判断这两个驻点是否为极值点，求二阶导数

$$\begin{cases} f_{xx}(x, y) = 6x \\ f_{xy}(x, y) = -1 \\ f_{yy}(x, y) = 48y \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 处， $A = f_{xx}(0, 0) = 0$, $B = f_{xy}(0, 0) = -1$, $C = f_{yy}(0, 0) = 0$

因为 $AC - B^2 = -1 < 0$, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点。

类似的，在点 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 处， $A = f_{xx}(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = 1$, $B = f_{xy}(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -1$, $C = f_{yy}(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = 4$

因为 $A = 1 > 0$, $AC - B^2 = 3 > 0$,

所以 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 是极小值点，极小值为 $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}$

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，总计 10 分）

21、设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ ，其中 $f(u)$ 为可导函数，

证明： $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ 。

证明：令 $u = x^2 - y^2$ ，于是 $z = \frac{y}{f(u)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xyf'(u)}{f^2(u)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(u) + 2y^2 f'(u)}{f^2(u)},$$

这样

$$\frac{1}{x} \left(-\frac{2xyf'(u)}{f^2(u)} \right) + \frac{1}{y} \left(\frac{f(u) + 2y^2 f'(u)}{f^2(u)} \right) = \frac{1}{yf(u)} = \frac{z}{y^2}$$

22、证明：直线 $L_1: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{cases}$ 垂直。

重庆理工大学本科生课程考试试卷

2020 ~ 2021 学年第 2 学期

开课学院 理学院 课程名称 高等数学【(2) 机电】 半期 考核方式 闭卷

考试时间 120 分钟 A 卷 共 页第 页

考生姓名 考生班级 考生学号

证明： 直线 $L_1: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{n}_1 = (1, -1, 1) \times (2, 1, 1) = (-2, 1, 3)$

直线 $L_2: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{n}_2 = (1, 1, 0) \times (0, 1, 1) = (1, -1, 1)$

由于 $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = (-2, 1, 3) \cdot (1, -1, 1) = -2 - 1 + 3 = 0$ ，故直线 L_1 与直线 L_2 垂直。