2018～ 2019 学年第二学期高等数学[(2)机电]
期末 B 卷参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1	2	3	4	5
C	A	D	B	C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6	7	8	9	10
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$	$\frac{-1}{18}(1,2,3)$	$x+2y-3z+14=0$	$\sqrt{2}$	$y=c_1e^{x^2}+c_2xe^{x^2}$

三、解答题（本大题共 2 个小题，每小题 10 分，总计 20 分）

11、解： 令 $u(x,y)=2x-y,\quad v(x,y)=3x-2y$ 则 $u(1,1)=1,\quad v(1,1)=1$，

于是 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.(2vu^{v-1}+3u^v\ln u)\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2$ (4 分)

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.(-vu^{v-1}-2u^v\ln u)\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=-1$ (6 分)

12、解：(1) $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot e^{xy}\cdot y=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$ (4 分)

(2) 在方程组两边同时对 x 求导，得 $\begin{cases}\frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx} & (1)\\ 2x+4y\frac{dy}{dx}+6z\frac{dz}{dx}=0 & (2)\end{cases}$， (3 分)

(1)代入(2)解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}$，再代入(1)得到 $\frac{dz}{dx}=\frac{x}{3z+1}$ (3 分)

四、计算题（本大题共 2 个小题，每小题 10 分，总计 20 分）

13、解 积分区域D可表示为 $D:0\le\theta\le 2\pi,0\le\rho\le 1$，

于是 $\iint_D (x+1)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho\cos\theta+1)\rho d\rho=\int_0^{2\pi}\left.[\frac{\rho^3}{3}\cos\theta+\frac{\rho^2}{2}]\right|_{\rho=0}^{\rho=1}d\theta$ (7 分)

$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{1}{2})d\theta=\left.[\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{1}{2}\theta]\right|_0^{2\pi}=\pi$ (3 分)

14、解：设曲面$\Sigma_1: z=1$，$x^2+y^2\le 1$取上侧，则$\iint_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$ ，

由高斯公式，$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=\iiint_{\Omega}0dv=0,$ 这里Ω是封闭曲面$\Sigma+\Sigma_1$围成的锥体区域； (5 分)

$\iint_{\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(x^2-y)dzdx+(x^2-y)dxdy=\iint_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy=\iint_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy,$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho^2\cos^2\theta-\rho\sin\theta)\rho d\rho=\frac{\pi}{4}$，这里$D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$是曲面$\Sigma_1$在$xoy$平面上的投影区域，故$\iint_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=-\frac{\pi}{4}.$ (5 分)

五、综合题（本大题共 2 个小题，每小题 10 分，总计 20 分）

15、(1) 证 $P=6xy^2-y^3, Q=6x^2y-3xy^2$. 由于$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2, \frac{\partial P}{\partial y}=12xy-3y^2$在整个$xoy$平面上均连续且相等, 故该曲线积分在整个$xoy$平面上与路径无关. (5 分)

(2) $I=\int_{A(1,2)}^{B(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy=\int_1^3(24t-8)dt+\int_2^3(54t-9t^2)dt=236$ (5 分)

16、(1) 设$u_n(x)=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2$，

当$x^2<1$时，得收敛区间为$(-1,1)$. 对端点$x=-1$, 幂级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$发散; 对端点$x=1$, 幂级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散. 故收敛域为$(-1,1)$. (3 分)

(2) 设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}, x\in(-1,1),$得$(s(x))'=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1})'=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{2n-1}}{2n-1})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}, x\in(-1,1).$

$s(x)=\int_0^x(s(t))'dt=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, x\in(-1,1)$ (5 分)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}s(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ (2 分)

六、应用题（本大题总计 10 分）

17、解：设矩形的长和宽分别为x和y，则问题归结为求目标函数$V=\pi x^2y(x>0,y>0)$在约束条件$x+y=12$下的极值。构造拉格朗日函数$L=\pi x^2y+\lambda(x+y-12)$

由方程组$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2\pi xy + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \pi x^2 + \lambda = 0, \\ x + y = 12, \end{cases}$ 解得 $x = 8, y = 4$.　　　　(8 分)

由问题的实际意义，最大体积必存在，即在唯一驻点 $(8,4)$ 处取得最大值，因此矩形的长和宽分别为 $8(cm)$ 和 $4(cm)$.　　　　(2 分)