

2018~ 2019 学年第二学期

《高等数学》（机电）（下） 参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1	2	3	4	5
C	A	D	B	C

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

6	7	8	9	10
$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$	$-\frac{1}{18}(1,2,3)$	$x+y+z-2=0$	π	重邮: 0
				交大: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$
				理工: $y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{1}{2}x}$

三、计算题（本大题共 2 个小题，每小题 10 分，总计 20 分）

11、解：（1）由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = (1+xy)e^{xy}$ ； $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^{xy}$ （3 分）

于是 $dz \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} dx + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} dy = dx + dy$ （5 分）

（2）由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = x(2+xy)e^{xy}$ 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = -2$ （10 分）

12、解：（1） $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y f_1' - \frac{y}{x^2} f_2'$ （5 分）

（2）方程组两边对 x 求导得

$$\begin{cases} 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0 \\ x + y \frac{dy}{dx} + z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x-z}{z-y} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y-x}{z-y} \end{cases} \quad \text{..... (10 分)}$$

四、计算题（本大题共 2 个小题，每小题 10 分，总计 20 分）

13、解： $I = \iint_D 2017 dx dy + \iint_D 4y^2 dx dy$
 $= 2017\pi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 4\rho^3 \sin^2 \theta d\rho \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$
 $= 2017\pi + \pi = 2018\pi \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

或 $I = \iint_D 2017 dx dy + \iint_D 4y^2 dx dy = 2017\pi + 2 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$
 $= 2017\pi + 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$
 $= 2017\pi + \pi = 2018\pi \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

14、解： 令 $P = 2x + z$, $Q = 0$, $R = z$, Ω 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 围成的闭区域。
 由于 Σ 取的是 Ω 的整个边界曲面的内侧，故由高斯公式有

$$I = - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = - \iiint_{\Omega} 3 dv \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^1 3\rho dz$$

$$= -2\pi \int_0^1 3\rho(1 - \rho^2) d\rho \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$= -\frac{3}{2}\pi$$

或 $I = - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = - \iiint_{\Omega} 3 dv \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

$$= - \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z} 3 dx dy$$

$$= - \int_0^1 3\pi z dz \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$= -\frac{3}{2}\pi$$

五、综合题（本大题共 2 个小题，每小题 10 分，总计 20 分）

15、（1）证明： 令 $P = e^y + 2x$, $Q = xe^y$

则整个 xoy 平面有 $\frac{\partial P}{\partial y} = e^y = \frac{\partial Q}{\partial x}$

故该曲线积分在整个 xoy 平面上与路径无关 $\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

（2）解： $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (e^y + 2x) dx + xe^y dy = \int_0^1 (1 + 2x) dx + \int_0^1 e^y dy = 1 + e \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

16、解：(1) 令 $a_n = \frac{1}{n 2^{n-1}}$,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}, \text{ 所以收敛半径 } R=2 \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

当 $x=2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^{n-1}} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ 发散;

当 $x=-2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^{n-1}} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}$ 收敛;

所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^{n-1}} x^n$ 收敛域为 $[-2, 2)$ \dots\dots\dots (5 \text{ 分})

(2) 设和函数为 $S(x)$, 即 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^{n-1}} x^n, x \in [-2, 2)$

由逐项求导得:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x} \quad (-2 < x < 2), \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{于是 } S(x) = \int_0^x \frac{2}{2-x} dx = -2 \ln(2-x) + 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{2}{2-x}, \quad (-2 \leq x < 2) \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

六、综合题 (本大题总计 10 分)

17、解: 先求驻点, 令 $\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y(x, y) = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

即驻点为 $(0, 0)$, $(1, 1)$ \dots\dots\dots (3 \text{ 分})

为了判断这两个驻点是否为极值点, 求二阶导数

$$\begin{cases} f_{xx}(x, y) = 6x \\ f_{xy}(x, y) = -3 \\ f_{yy}(x, y) = 6y \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

在点 $(0, 0)$ 处, $A = f_{xx}(0, 0) = 0, B = f_{xy}(0, 0) = -3, C = f_{yy}(0, 0) = 0$

因为 $AC - B^2 = -9 < 0$, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点。 \dots\dots\dots (7 \text{ 分})

类似的, 在点 $(1, 1)$ 处, $A = f_{xx}(1, 1) = 6, B = f_{xy}(1, 1) = -3, C = f_{yy}(1, 1) = 6$

因为 $A = 6 > 0, AC - B^2 = 27 > 0$,

所以 $(1, 1)$ 是极小值点, 极小值为 $f(1, 1) = -1$ \dots\dots\dots (10 \text{ 分})