学院：　　专业：　　班级：　　姓名：　　学号：

装　订　线　　密　封　线

2016 级《高等数学》（下）　联考试卷

试卷 A (A/B)　考核方式 闭卷 (闭卷/开卷)　考试时间 (120 分钟)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
评卷人										

得 分	评卷人

一、单项选择题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1、二元函数 $z = 2017 - x^2 - y^2$ 的图像为(　D　).

(A) 圆锥面　　(B) 双曲面

(C) 球　面　　(D) 抛物面

2、考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；　(2) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分；　(4) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 存在.

若用“$P \Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则下列四个选项中正确的是(　A　).

(A) $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$　　(B) $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

(C) $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$　　(D) $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$

3、设区域 $D = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$，$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$，则 $\iint\limits_D (xy + x^2 \sin y) dxdy =$ (　C　).

(A) $4\iint\limits_{D_1} (xy + x^2 \sin y) dxdy$　　(B) 0

(C) $2\iint\limits_{D_1} x^2 \sin y dxdy$　　(D) $2\iint\limits_{D_1} xy dxdy$

4、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^3+y^3+z^3+3xyz=2017$ 确定，且 $z^2+xy\neq 0$ ，则

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$(D).

(A) $\dfrac{y^3+x^3}{z^2+xy}$　　(B) $\dfrac{-x^3-y^3}{z^2+xy}$

(C) $\dfrac{x^3-y^3}{z^2+xy}$　　(D) $\dfrac{y^3-x^3}{z^2+xy}$

5、常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件为(B). (其中 S_n 为其部分和)

(A) 数列 $\{S_n\}$ 有界　　(B) 数列 $\{S_n\}$ 收敛

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n\neq 0$

得 分	评卷人

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

6、已知向量 $\vec{a}=(2,-1,-2)$ ，$\vec{b}=(1,1,-4)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta=$ $\underline{\quad \dfrac{\pi}{4} \quad}$.

7、函数 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ 在 $(1,1,2)$ 的梯度为 $\underline{\quad (3,3,2) \quad}$.

8、设空间区域 Ω 由 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=0$ 围成，在柱坐标下化三重积分为三次积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz=$ $\underline{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{1-\rho}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz}$.

9、已知曲面 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=9$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=$ $\underline{\quad 12\pi \quad}$.

10、(交大的同学做) 函数 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ 关于 x 的幂级数为 $\underline{\dfrac{1}{(1-x)^2}=(\dfrac{1}{1-x})'=(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}}$ $(-1<x<1)$.

10、(重邮的同学做) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-2 & ,-\pi\le x<0\\ x^2 & ,0\le x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=4\pi$ 处收敛于 $\underline{\dfrac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\dfrac{-2+0^2}{2}=-1}$.

得 分	评卷人

三、计算题（本大题共 2 个小题，每小题 5 分，总计 10 分）

11、设二元函数$z=ye^{xy}$，试求：(1) $dz\big|_{\substack{x=1\\y=2}}$；(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{\substack{x=1\\y=2}}$.

解 $z_x=ye^{xy}y, z_y=e^{xy}+ye^{xy}x;\quad z_x\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=4e^2, z_y\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=3e^2$；

(1) $dz\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=z_x\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}dx+z_y\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}dy=4e^2dx+3e^2dy$；

(2) $z_{xy}=\dfrac{\partial}{\partial y}(z_x)=2ye^{xy}+y^2e^{xy}x=e^{xy}(2y+xy^2)$，$z_{xy}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=8e^2$.

得 分	评卷人

四、计算题（本大题共 2 个小题，每小题 5 分，总计 10 分）

12、设函数$z=f(x+y,xy)$在点$(1,1)$处一阶偏导数连续，且$f(2,1)=3$，试求：

(1) $dz\big|_{(1,1)}$；(2) 曲面$z=f(x+y,xy)$在点$(1,1,3)$处的切平面方程.

解 $z_x=f_1(x+y,xy)\cdot 1+f_2(x+y,xy)\cdot y;\quad z_y=f_1(x+y,xy)\cdot 1+f_2(x+y,xy)\cdot x$；

$z_x\big|_{(1,1)}=f_1(2,1)+f_2(2,1);\quad z_y\big|_{(1,1)}=f_1(2,1)+f_2(2,1)$；

(1) $dz\big|_{(1,1)}=z_x\big|_{(1,1)}dx+z_y\big|_{(1,1)}dy=[f_1(2,1)+f_2(2,1)][dx+dy]$；

(2) 设$F(x,y,z)=f(x+y,xy)-z$，$F_x=f_1'(x+y,xy)\cdot 1+f_2'(x+y,xy)\cdot y$，

$F_y=f_1'(x+y,xy)\cdot 1+f_2'(x+y,xy)\cdot x$，$F_z=-1$，得到曲面$z=f(x+y,xy)$在点$(1,1,3)$处

的切平面法向量为$(F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,1,3)}=(f_1'(2,1)+f_2'(2,1), f_1'(2,1)+f_2'(2,1),-1)$，从而

曲面$z=f(x+y,xy)$在点$(1,1,3)$处的切平面方程为

$[f_1'(2,1)+f_2'(2,1)](x-1)+[f_1'(2,1)+f_2'(2,1)](y-1)-1(z-3)=0$。

得 分	评卷人

五、计算题（本大题共 2 个小题，每小题 5 分，总计 10 分）

13、设 $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中积分区域 $D: x^2+y^2 \le 2x\ (y \ge 0)$，试求：

(1) 把积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 表为极坐标形式的二次积分；

(2) 若 $f(x,y)=1+y$，计算 I 值.

解 积分区域 $D: x^2+y^2 \le 2x\ (y \ge 0)$ 可表示为 $D=\{(\theta,\rho) \mid -\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0 \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le 2\cos\theta\}$，

(1) $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$；

(2) $I=\iint_D (1+y)dxdy = \iint_D 1 dxdy = \pi$.

得 分	评卷人

六、计算题（本大题总计 10 分）：

14、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} z\,dxdy+x\,dydz+y\,dzdx$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧.

解 法一（高斯公式） $\iint_{\Sigma}=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_3}-\iint_{\Sigma_4}$，其中有向平面

$\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\le 1; \Sigma_2: z=3, x^2+y^2\le 1; \Sigma_3: y=0, 0\le x\le 1, 0\le z\le 3; \Sigma_4: x=0, 0\le y\le 1, 0\le z\le 3$

分别取下侧、上侧、左侧和后侧.

根据高斯公式，$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_{\Omega}3dv=3\times\dfrac{\pi}{4}\times 3=\dfrac{9\pi}{4}$；

由投影性质和被积函数中变量满足曲面方程得

$$\iint_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{\Sigma_1} zdxdy=0;\iint_{\Sigma_2} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{\Sigma_2} 3dxdy=\frac{3\pi}{4};$$

$$\iint_{\Sigma_3} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{\Sigma_3} ydzdx=0;\iint_{\Sigma_4} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{\Sigma_4} xdydz=0;$$

故 $\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\dfrac{9\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}$.

法二 有向曲面 Σ：$x=\sqrt{1-y^2}$ 取前侧，令 $F(x,y,z)=x-\sqrt{1-y^2}$，即得有向曲面 Σ 上点的切平面法向量 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(1,\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}},0)$，其方向余弦为

$\cos\alpha=\sqrt{1-y^2}, \cos\beta=y, \cos\gamma=0,$ 曲面面积微元 $dS=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}dydz$，

$D_{yz}=\{(x,y)\big|0\le y\le 1, 0\le z\le 3\}$，于是

$$\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{D_{yz}}(\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-y^2}+y\cdot y+z\cdot 0)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dydz=\iint_{D_{yz}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dydz$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy\int_0^3 dz=3\arcsin y\Big|_0^1=\frac{3\pi}{2}.$$

得 分	评卷人

七、应用题（本大题共 2 个小题，每小题 5 分，总计 10 分）

15、设曲线积分 $\int_L (2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$ ，其中 L 为 xOy 平面上一条有向曲线，试求：

(1) 证明：该曲线积分在整个平面 xOy 上与路径无关；

(2) 计算：$\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$.

（1）证　$P=2xy-y^4+3, Q=x^2-4xy^3$ 。因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3, \dfrac{\partial P}{\partial y}=2x-4y^3$ 在整个 xoy 平面上均连续且相等，故曲线积分在整个 xOy 平面上与路径无关；

（2）为计算曲线积分值，选 $A(1,0)$ 到 $B(2,1)$ 的特殊路径，如从 $A(1,0)$ 到 $C(2,0)$ 再到 $B(2,1)$ 的折线段. 于是 $\int_{A(1,0)}^{B(2,1)}=\int_{\overline{AC}} \quad +\int_{\overline{CB}} \quad$. 有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 的参数方程分别为

$\overrightarrow{AC}: x=x, y=0, x$从$1$到$2$；$\overrightarrow{CB}: x=2, y=y, y$从$0$到$1$，于是得

$$\int_{\overline{AC}} (2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy=\int_1^2 3dx=3;$$

$$\int_{\overline{CB}} (2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy=\int_0^1 (4-8y^3)dy=2;$$

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy=5 .$$

得 分	评卷人

八、综合题（本大题共 2 个小题，每小题 5 分，总计 10 分）

16、设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2018^n}$的，试求：

(1) 收敛半径及其收敛域；(2) 在收敛域内的和函数.

解 （1）设$u_n=\frac{n}{2018^n},\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2018^{n+1}}\cdot\frac{2018^n}{n}=\frac{1}{2018}$，故收敛半径$R=2018$，

因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-2018)^n}{2018^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2018)^n}{2018^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n$发散，故收敛域为$(-2018,2018)$.

(2)设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2018^n},-2018<x<2018$，则$\frac{s(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2018^n}x^{n-1},x\neq 0,x\in(-2018,2018)$,

$$\int_0^x\frac{s(t)}{t}dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2018^n}t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2018^n}\int_0^x t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2018^n},x\neq 0,x\in(-2018,2018),$$

$\frac{s(x)}{x}=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2018^n})'=(\frac{x}{2018-x})'=\frac{2018}{(2018-x)^2},x\neq 0,x\in(-2018,2018)$, 故

$$s(x)=\frac{2018x}{(2018-x)^2},x\in(-2018,2018).$$

得 分	评卷人

九、综合题（本大题共 10 分）

17、求二元函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

解 令 $\begin{cases} f_x = 2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x}x=0, \\ f_y = e^{2x}(2y+2)=0, \end{cases}$ 驻点为 $(\frac{2}{3},-1)$，

$f_{xx}(x,y)=e^{2x}(6x+4y^2+8y+3)$, $f_{xy}(x,y)=e^{2x}(4y+4)$, $f_{yy}(x,y)=2e^{2x}$，

因为 $A=f_{xx}(\frac{2}{3},-1)=3e^{\frac{4}{3}}$, $B=f_{xy}(\frac{2}{3},-1)=0$, $C=f_{yy}(\frac{2}{3},-1)=2e^{\frac{4}{3}}$，且

$AC-B^2=6e^{\frac{8}{3}}>0$, $A>0$，极小值为 $f(\frac{2}{3},-1)=-\frac{1}{3}e^{\frac{4}{3}}$.