学院：

专业：

班级：

姓名：

学号：

密 封 线

2015 级《高等数学》（下） 联考试卷

试卷 A ，(A/B)，考核方式 闭卷 (闭卷/开卷)，考试时间（120 分钟）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分　数										
评卷人										

得 分	评卷人

一、单项选择题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）。

1．二元函数 $z=2016-\sqrt{x^2+y^2}$ 的图像为（ C ）。

(A) 球面；　(B) 双曲面；　(C) 圆锥面；　(D) 抛物面

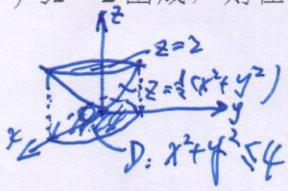
2、函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的所有一阶偏导数都存在是该函数在该点可微的（ A ）。

（A）必要而非充分条件　（B）充分而非必要条件

（C）充分必要条件　（D）既非充分，又非必要条件

3、设 Ω 由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与 $z=2$ 围成，则在柱坐标下 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=$

（ D ）。



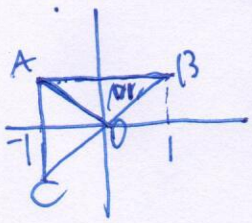
$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) dz$

（A）$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{\frac{1}{2}\rho^2} f(\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, z)dz$

（B）$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{2} f(\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, z)dz$

（C）$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{\frac{1}{2}\rho^2} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)dz$

（D）$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{2} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)dz$



△AOC 关于 x 轴对称

△AOB … y … —

$\iint_{\triangle AOC}(xy+\cos x\sin y)dxdy=0$

$\iint_{\triangle AOB}(xy+\cos x\sin y)dxdy=\underbrace{\iint_{\triangle AOB}xydxdy}_{=0}+\iint_{\triangle AOB}\cos x\sin ydxdy$

$=2\iint_{D_1}\cos x\sin ydxdy$

4. 设有平面区域 $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1, x\le y\le 1\}$，$D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$

则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)d\sigma=$（ A ）。 $=\iint_{\triangle AOC}+\iint_{\triangle AOB}$

（A） $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\, d\sigma$； （B） $2\iint\limits_{D_1}xy\, d\sigma$；

（C） $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\, d\sigma$； （D） 0

5. 下列级数中，收敛的是（ D ）。

（A） $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{n}$ （B） $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[\frac{n}{n+1}\right]$ （C） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ （D） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

得 分	评卷人

二、填空题（本大题共五个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

$\cos\theta=\frac{|\vec a\cdot\vec b|}{|\vec a||\vec b|}=\frac{|1+0+0|}{\sqrt2\cdot\sqrt2}=\frac12$

6. 已知向量 $\vec{a}=(1,1,0)$，$\vec{b}=(1,0,1)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta=$ $\frac{\pi}{3}$ 。

7. 已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & x^2+y^2\ne 0\\ k, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处连续，$\Rightarrow k=f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)[\sqrt{x^2+y^2+1}+1]}{x^2+y^2}$

则 $k=$ 2 。

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)=2$

8. 二次积分 $\int_0^1dy\int_y^1 f(x,y)dx$ 改换积分次序为 $\int_0^1dx\int_0^x f(x,y)dy$，

$0\le y\le 1,\ y\le x\le 1 \Rightarrow 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$

9. 设空间闭区域 Ω 的整个表面为 Σ，其面积为 1008，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}2dS=$ $2\iint\limits_{\Sigma}dS=2\times1008$ $=2016$。

10.（**交大的同学做**）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数为 e^x-1 $x\in(-\infty,+\infty)$

10.（**重邮的同学做**）函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -\pi\le x<0\\ \pi x & 0\le x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅立叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 $\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi^2+(-\pi)^2}{2}=\pi^2$

得 分	评卷人

三、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）

11．设方程 $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，

（1）求 dz

（2）求曲面 $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ 在点 $(1,2,-1)$ 处的切平面方程。

设 $F=x^3+y^3+z^3+xyz-6$，$F_x=3x^2+yz$，$F_y=3y^2+xz$，$F_z=3z^2+xy$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3x^2+yz}{3z^2+xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{3y^2+xz}{3z^2+xy}$

(1) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{-(3x^2+yz)dx-(3y^2+xz)dy}{3z^2+xy}$

(2) 此曲面在点 $(1,2,-1)$ 处切平面法向量 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,2,-1)}=(1,11,5)$

∴切平面方程 $x-1+11(y-2)+5(z+1)=0$

得 分	评卷人

四、计算题（本大题共两个小题，每小题 5 分，满分 10 分）

12．（1）设 $z=\sin(xy^2)+xy$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，

（2）设 $z=f(xy,x^2\sin y)$，f 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy^2)\cdot y^2+y$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=1+2y\cos(xy^2)+y^2(-\sin(xy^2))2xy$

$=1+2y\cos(xy^2)-2xy^3\sin(xy^2)$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot 2x\sin y$.

得 分	评卷人

五、计算题（本大题共 10 分）

13. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D (2017-4x^2)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$。 其面积 $S_D=\pi$

$=2017S_D-4\iint\limits_D x^2dxdy$ 令 D: $0\le\theta\le2\pi$, $0\le\rho\le1$

$=2017\pi-4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho d\rho$

$=2017\pi-4\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{4}\cdot d\theta=2017\pi-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta$

$=2017\pi-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos2\theta)d\theta=2017\pi-\frac{1}{2}[2\pi+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big|_0^{2\pi}]$

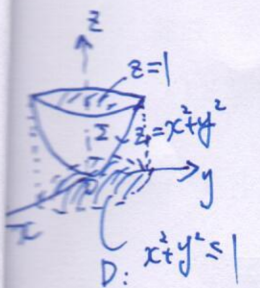
$=2017\pi-\frac{1}{2}[2\pi+\frac{1}{2}\times0]=2016\pi$

得 分	评卷人

六、计算题（本大题共分 10 分）：

14. 计算 $I=\iint\limits_\Sigma x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$，其中 Σ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分的下侧。

$I=\iint\limits_\Sigma(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=\iint\limits_\Sigma\frac{2x^2+2y^2-z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}dS$



$=\iint\limits_D\frac{2x^2+2y^2-(x^2+y^2)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$

$=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

Σ上点的切平面

法向量 $\vec{n}=(2x,2y,-1)$

其方向余弦 $\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$

$\cos\beta=\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$

$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$

曲面Σ: $z=x^2+y^2$

∴曲面面积微元 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

$=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$

得 分	评卷人

七、应用题（本大题满分 10 分）：

15. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展成 x 的幂级数，并指出其收敛域。

$=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$，$|x|<1$，$\left|\dfrac{x}{2}\right|<1$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right]x^n$，$|x|<1$ 即 $x\in(-1,1)$

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ 发散（因通项极限不为0）

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\left[1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right]$ 发散（因通项极限不为0）

∴收敛域为 $(-1,1)$.

得 分	评卷人

八、综合应用题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

16. 设曲线积分 $\int_L(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$，其中 L 为 xoy 平面上一条有向曲线，

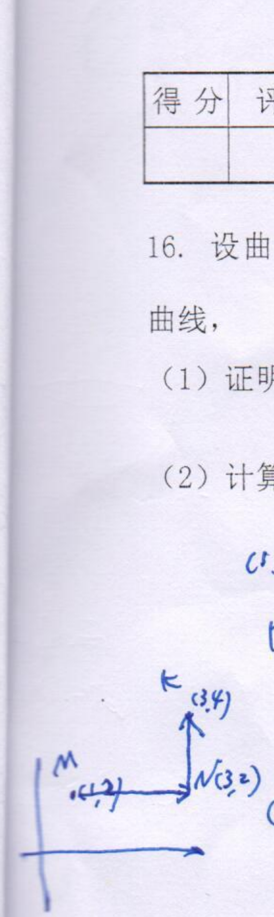
（1）证明：该曲线积分在整个 xoy 平面上与路径无关，

（2）计算：$I=\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$。

(1) $P=6xy^2-y^3$，$Q=6x^2y-3xy^2$

因 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 xoy 平面上任意点 (x,y) 都成立.

∴



(2) $\overrightarrow{MN}$: $y=2$, $x=t$ t从1变到3

$\overrightarrow{NK}$: $x=3$, $y=t$ t从2变到4

$I=\int_1^3(24t-8)dt+\int_2^4(54t-9t^2)dt$

$=24\dfrac{t^2}{2}\Big|_1^3-8\times2+54\cdot\dfrac{t^2}{2}\Big|_2^4-9\dfrac{t^3}{3}\Big|_2^4$

$=12(9-1)-16+27(16-4)-3(64-8)$

$=96-16+27\times12-3\times56=3(32+9\times12-56)-16$

$=3\times84-16$

$=252-16=236$

得 分	评卷人

九、综合应用题（本大题共 10 分）

17．某厂要用铁皮做成一个体积为 8 m^3 的有盖长方体水箱，问当水箱的长、宽、高各为取多少时，才能使用料最省。

设长,宽,高分别为 x, y, z (m)

则 $xyz=8$，表面积 $S = 2(xy+yz+xz)$ 即求在条件 $xyz=8$ 下 S 的最小值

设拉格朗日函数

$$L = 2xy+2yz+2xz+\lambda(xyz-8)$$

$x, y, z > 0$

令 $$\begin{cases} L_x = 2y+2z+\lambda yz = 0 \\ L_y = 2x+2z+\lambda xz = 0 \\ L_z = 2y+2x+\lambda xy = 0 \\ L_\lambda = xyz-8 = 0 \end{cases}$$

得 $x=y=z=\sqrt[3]{8}=2$ (m)

∴ 当长,宽,高均为2m时 S 最小 即材料最省.