2013～ 2014 学年第二学期高等数学[(2)机电]

B 卷参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
D	D	A	A	C	B	B	C	C	C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
3	$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$	0	$(-1,1)$	0

三、求解下列各题（本大题共 10 小题，每小题 6 分，共 60 分）

（1）解： 直线$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$的方向向量$\vec{s}=(3,-1,2)$，点$Q(2,1,0)$在直线上，

$\overrightarrow{PQ}=(1,2,-2)$ $\cdots\cdots(2分)$，

由题意得所求平面的法向量

$$\vec{n}=\vec{s}\times\overrightarrow{PQ}=(3,-1,2)\times(1,2,-2)=(-2,8,7) \quad \cdots\cdots(5分)$$

故所求平面方程为 $-2(x-1)+8(y+1)+7(z-2)=0$，

即 $-2x+8y+7z-4=0$ $\cdots\cdots(6分)$

（2）解： $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=\left.(3x^2y^2-2y^3+y)\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-1$ $\cdots\cdots(2分)$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=\left.(2x^3y-6xy^2+x)\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=0 \quad \cdots\cdots(4分)$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=\left.(6x^2y-6y^2+1)\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-5 \quad \cdots\cdots(6分)$$

$z=f(2x,x+3y)$

（3）解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f_1'+f_2'$ ……(3分）

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3f_2' \qquad \cdots\cdots(6分)$$

$$f(x,y)=x^2+y^2-2(2x-y)$$

（4）解： 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=2x-4=0 \\ f_y(x,y)=2y+2=0 \end{cases}$ 得驻点 $(2,-1)$ $\cdots\cdots(2分)$

又 $A=f_{xx}(2,-1)=2>0$， $B=f_{xy}(2,-1)=0$， $C=f_{yy}(2,-1)=2$，

则 $AC-B^2>0$， 于是函数在 $(2,-1)$ 处有极大值 $f(2,-1)=-5$ $\cdots\cdots(6分)$

（5）解： $\iint\limits_D x^2y^2d\sigma=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\,x\int_{-1}^{1}x^2y^2\,\mathrm{d}\,y$ $\cdots\cdots(3分)$

$$=(\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}\,x)(\int_{-1}^{1}y^2\,\mathrm{d}\,y) \qquad \cdots\cdots(4分)$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{9} \qquad \cdots\cdots(6分)$$

（6）解： $\iiint\limits_\Omega (x+y)zdv=\iiint\limits_\Omega(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)z\rho d\rho d\theta dz$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^1\rho^2d\rho\int_0^1zdz \qquad \cdots\cdots(4分)$$

$$=\left[\sin\theta-\cos\theta\right]_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1=0 \qquad \cdots\cdots(6分)$$

（7）解： L 的方程为 $y=1-x,\quad 0\le x\le 1$， $\cdots\cdots(2分)$

$$\int_L(x-y)ds=\int_0^1(x-1+x)\sqrt{1+1}dx \qquad \cdots\cdots(4分)$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1(2x-1)dx$$

$$=\sqrt{2}\left[x^2-x\right]_0^1=0 \qquad \cdots\cdots(6分)$$

（8）解： 令 $P=3x+y,\ Q=2x-y$，由格林公式得

$$\oint_L(3x+y)dx+(2x-y)dy$$

$$=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=\iint\limits_D d\sigma \qquad \cdots\cdots(4分)$$

$$=4\pi \qquad \cdots\cdots(6分)$$

（9）解： 令 $P=1-x,\ Q=1+2y, R=y+z$，由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma}(1-x)dydz+(1+2y)dzdx+(y+z)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv$$

$$=\iiint_{\Omega}(-1+2+1)dv \qquad \cdots\cdots(4分)$$

$$=2V=6\pi \qquad \cdots\cdots(6分)$$

（10）解： 令 $u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3}$， 则 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛， ……(2分)

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3}$ 收敛且绝对收敛. ……(6分)

四、证明题（5 分）

证明： 直线 L_1： $\begin{cases}x-y+z=1\\2x+y+z=4\end{cases}$ 的方向向量为

$$\vec{n}_1=(1,-1,1)\times(2,1,1)=(-2,1,3)$$

直线 L_2： $\begin{cases}x+y-3=0\\y+z+2=0\end{cases}$ 的方向向量为

$$\vec{n}_2=(1,1,0)\times(0,1,1)=(1,-1,1) \qquad \cdots\cdots(3分)$$

由于 $\vec{n}_2\cdot\vec{n}_1=(-2,1,3)\cdot(1,-1,1)=-2-1+3=0$，故直线 L_1 与直线 L_2 垂直. ……(5分)