2018～ 2019 学年第二学期

高等数学 A2【机电】半期考试参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

题号	1	2	3	4	5
答案	D	C	C	A	B

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

题号	6	7	8	9	10
答案	$(ax+b)e^x$	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{3}$	1	$x+2y-4=0$	$\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

三、解答题（本大题共 6 个小题，每小题 10 分，总计 60 分）

11、解：（1）直线 $L:\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 的方向向量为：

$$\vec{s}=(1,1,-1)\times(1,-1,1)=(0,-2,-2)=-2(0,1,1),$$

方向向量取 $\vec{s}=(0,1,1)$

平面 $\pi: x+y+2z-1=0$ 的法向量为：$\vec{n}=(1,1,2)$

故直线 L 与平面 π 的夹角 φ 的正弦为 $\sin\varphi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|1+2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

于是直线 L 与平面 π 的夹角 $\varphi=\frac{\pi}{3}$

（2）过直线 $L:\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 的平面束的方程为：

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$$

即 $$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z-1+\lambda=0$$

这平面与平面 $\pi: x+y+2z-1=0$ 垂直的条件是：

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 2=0$$

得 $$\lambda=0$$

于是投影平面方程为$x+y-z-1=0$

直线L在平面π上的投影直线方程$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x+y+2z-1=0 \end{cases}$

12、（1）解：令$u=\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代人得

$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+2\tan u$，即　$\dfrac{\mathrm{d}u}{\tan u}=2\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，

两端积分得$\int\dfrac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\int 2\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，于是$\ln|\sin u|=\ln x^2+C'$

这样方程的通解为：$\sin\dfrac{y}{x}=Cx^2$

（2）解：特征方程为：$r^2+2r-3=0$

$$r_1=-3, r_2=1$$

所以$y''+2y'-3y=0$的通解为$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$

13、解：（1）由于$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy^3-2x\ln x-x$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2$

于是　$dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}dy=dx+3dy$

（2）由　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=6xy^2$　得　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=6$

14、解：（1）　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yx^{y-1}f_2'$

（2）方程组两边对z求导得

$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dz}+2\dfrac{dy}{dz}+1=0 \\ x\dfrac{dx}{dz}+y\dfrac{dy}{dz}+z=0 \end{cases}$　解得　$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz}=\dfrac{2z-y}{2(y-x)} \\ \dfrac{dy}{dz}=\dfrac{x-2z}{2(y-x)} \end{cases}$

15、解：　$\iint\limits_D (x+2)^2dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy+\iint\limits_D 4xdxdy+\iint\limits_D 4dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\cos^2\theta d\rho+0+8\pi$$

$$=\pi+8\pi=9\pi$$

或 $$\iint_D (x+2)^2 dxdy = \iint_D x^2 dxdy + \iint_D 4x dxdy + \iint_D 4 dxdy$$
$$= \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2) dxdy + 0 + 8\pi$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho + 8\pi$$
$$= \pi + 8\pi = 9\pi$$

16、解：先求驻点，令 $\begin{cases} f_x(x,y) = 6-6x = 0 \\ f_y(x,y) = -4-4y = 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

即驻点为 $(1,-1)$

为了判断这两个驻点是否为极值点，求二阶导数

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) = -6 \\ f_{xy}(x,y) = 0 \\ f_{yy}(x,y) = -4 \end{cases}$$

在点 $(1,-1)$ 处， $A = f_{xx}(1,-1) = -6,\ B = f_{xy}(1,-1) = 0,\ C = f_{yy}(1,-1) = -4$

因为 $A = -6 < 0,\ AC - B^2 = 24 > 0$，

所以 $(1,-1)$ 是极大值点，极大值为 $f(1,-1) = 5$

四、综合应用题（10 分）

17、解：令 $u = e^{2x+3y}$，即 $z = f(u)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+3y} f'(u),\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{2x+3y} f'(u)$

由 $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = z - 1$ 得 $\quad 2e^{2x+3y} f'(u) - 3e^{2x+3y} f'(u) = z - 1$

即 $$f'(u) + \frac{1}{u} f(u) = \frac{1}{u}$$

而 $f'(u) + \frac{1}{u} f(u) = \frac{1}{u}$ 为一阶线性微分方程，其中 $P(u) = \frac{1}{u},\quad Q(u) = \frac{1}{u}$，

$$f(u) = e^{-\int P(u)du}\left(\int Q(u) e^{\int P(u)du} du + C\right) = e^{-\int \frac{1}{u}dx}\left(\int \frac{1}{u} e^{\int \frac{1}{u}du} du + C\right) = 1 + \frac{C}{u}$$

由 $f(1) = 0$ 得 $C = -1$．于是函数 $f(u)$ 的表达式为

$$f(u) = 1 - \frac{1}{u}$$