高等数学[(a2)机电](A 卷）参考答案及评分标准(14-15 学年下）

一、判断题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1	2	3	4	5
√	×	×	×	√

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

（6）__-3__ （7）$x^2=y^2+z^2$ （8）__垂直__ （9）$-xy$ （10）__0__

（11）__2__ （12）Ax^2e^{3x} （13）__外__ (14) $\int_{-1}^{0}(8t^3-2t^2+t+2)dt$ （15）__偶__

三、求解下列各题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）。

（16）求解微分方程 $y''-3y'-4y=0,y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=-5$。

解：$\because$ 特征方程为$r^2-3r-4=0,r_1=-1,r_2=4$……2分

$\therefore$ 通解为$y=c_1e^{-x}+c_2e^{4x}$(c_1,c_2为任意常数)……2分

又由初始条件得$c_1=1,c_2=-1$

$\therefore$ 满足初始条件的特解为：$y=e^{-x}-e^{4x}$……2分

（17）求空间曲线 $x=\sqrt{t},y=\dfrac{1+2t}{t},z=2t^2$ 在点（1，3，2）处的切线方程与法平面方程。

解：$\because x'=\dfrac{1}{2\sqrt{t}},y'=-\dfrac{1}{t^2},z'=4t$ ……2分

$\therefore$ 曲线在（1,3,2）处的切向量$\vec{T}=(\frac{1}{2},-1,4)=\frac{1}{2}(1,-2,8)$ ……2分

$\therefore$ 切线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{8}$ ……1分

$\therefore$ 法平面方程为：$(x-1)-2(y-3)+8(z-2)=0$ ……1分

（18）设 $u=f(x^2-y^2,\sin(xy))$，求全微分 du。

解：$\because u'_x=2xf_1+y\cos(xy)f_2$ ……2分

$u'_y=-2yf_1+x\cos(xy)f_2$ ……2分

$\therefore du=[2xf_1+y\cos(xy)f_2]dx+[-2yf_1+x\cos(xy)f_2]dy$ ……2分

（19）计算 $I=\iint\limits_D(x+y)dxdy$, 其中 D 是由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 围成的空间区域在 xoy 坐标面上投影区域 $y\geq 0$ 的部分。

解： $I=\iint\limits_D\rho(\cos\theta+\sin\theta)\rho d\rho d\theta$ ……2分

$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\rho^2(\cos\theta+\sin\theta)d\rho$ ……2分

$=\int_0^{\pi}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^1\rho^2d\rho$ ……1分

$=\frac{1}{3}[\sin\theta-\cos\theta]\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3}$ ……1分

（20）计算 $\oint_L(x^2\sin 2y+\ln^2 y)dy-(x\cos 2y+3y)dx$, 其中 $L:x^2-2x+y^2=0$，取顺时针方向。

解：$\because \dfrac{\partial P}{\partial y}=2x\sin 2y-3,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x\sin 2y$……2分

$\therefore$ 由格林公式得

原式 $=-\iint\limits_D 3dxdy$ ……2分

$=-3\pi$ ……2分

（21）计算$\iint\limits_{\Sigma} z\sin ydxdy+(2-x)\sin ydydz+3ydzdx$，其中$\Sigma$是界于$z=1$和$z=3$之间的圆柱体$x^2+y^2\le 1$的整个表面的外侧。

解：$\because \dfrac{\partial P}{\partial x}=-\sin y,\dfrac{\partial Q}{\partial y}=3,\dfrac{\partial R}{\partial z}=\sin y$……2分

$\therefore$由高斯公式得

原式$=\iiint\limits_{\Omega} 3dxdydz$　　　　……2分

$=6\pi$　　　　……2分

（22）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 5^n n!}{n^n}$是否收敛？如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{5^n n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{5}{e}>1$……2分

$\therefore$原级数不绝对收敛。　　　　……1分

且，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n n!}{n^n}\neq 0$　　　　……2分

则，原级数发散。　　　　……1分

（23）将函数$y=\dfrac{1}{3+x}$展开为$x-1$的幂级数。

解：$\because \dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1)$……2分

$\therefore y=\dfrac{1}{4+(x-1)}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1-[-\frac{(x-1)}{4}]}$……1分

$=\dfrac{1}{4}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}[-\dfrac{(x-1)}{4}]^n$　　　　……2分

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n$

且，$-4<x-1<4$　　即$-3<x<5$……1分

四、应用题和证明题（共 22 分）

(24) 现用面积为 24 平方米的铁皮做长方形铁箱，问如何选取长、宽、高才能使其容积最大。(8 分)

解：设铁箱的长、宽、高分别为x、y、z,

那么，问题是在条件$xy+yz+xz=12$下，

求铁箱的容积$V=xyz$的最大值。 ……1分

$\therefore$由拉格朗日乘数法，

作函数$L(x,y,z)=xzy+\lambda(xy+yz+xz-12)$……2分

令：$L_x=zy+\lambda(y+z)=0$

$L_y=xz+\lambda(x+z)=0$

$L_z=xy+\lambda(y+x)=0$ ……2分

并由条件$xy+yz+xz=12$解得：$x=y=z=2$ ……2分

这是唯一可能的极值点，而最大值一定存在，所以必使铁箱的容积最大。……1分

（25）设空间闭区域由曲面$x^2+y^2-z^2=0$和球面$x^2+y^2+z^2=2$的下半部分所围成，求该闭区域的体积。（7 分）

解：由条件知，所求体积V为

$V=\iint\limits_D(-\sqrt{x^2+y^2}-(-\sqrt{2-x^2+y^2}))dxdy$……2分

(其中，$D:x^2+y^2\le 1$) ……1分

$=\iint\limits_D(\sqrt{2-\rho^2}-\rho)\rho d\rho d\theta$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\sqrt{2-\rho^2}-\rho)\rho d\rho$ ……2分

$=-\pi\int_0^1\sqrt{2-\rho^2}d(2-\rho^2)-2\pi\int_0^1\rho^2d\rho$ ……1分

$=\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$ ……1分

（26）证明：$\int_0^2dx\int_{\frac{x}{2}}^1\frac{\sin y}{y}dy=2(1-\cos 1)$。(7 分)

证：$\because$ 左边$=\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}dxdy$ ……1分

(其中，$D:0<x<2,\frac{x}{2}<y<1$,也即，$D:0<x<2y,0<y<1$)……1分

$=\int_0^1dy\int_0^{2y}\frac{\sin y}{y}dx$ ……2分

$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}dy\int_0^{2y}dx=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\cdot 2ydy=2\int_0^1\sin ydy$ ……2分

$=-2\cos y\Big|_0^1=2(1-\cos 1)=$右边 ……1分

$\therefore$等式成立。