2019-2020（1）机电高数期末考题解析

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 若函数 $f(x)=\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+2x-3}\right)^{2020}$ 在自变量的某一变化过程中是无穷大，则自变量的变化趋势为（　　）

A. $x\to 0$　　**B.** $x\to 1$　　**C.** $x\to -3$　　**D.** $x\to\infty$

解析： 由 $\lim\limits_{x\to} f(x)=\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+3)}\right)^{2020}=\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{2020}=\infty$，得 $x\to -3$，选 **C.**

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\tan\frac{x}{3}}, & x\neq 0(x\geq -1)\\ k, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $k=$（　　）

A. 0　　**B.** 1　　**C.** $\dfrac{3}{2}$　　**D.** $\dfrac{2}{3}$

解析： 因为 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，得 $k=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\tan\frac{x}{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x}{\frac{x}{3}}=\dfrac{3}{2}$，这里用到当 $\varphi(x)\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+\varphi(x)}-1\sim\dfrac{1}{n}\varphi(x),\ \tan\varphi(x)\sim\varphi(x)$，及等价无穷小替换定理求极限。选 **C.**

3. 设 $y=f(\dfrac{1}{x})$，其中函数 $f(x)$ 可导，则 $\dfrac{dy}{dx}=$（　　）

A. $f'(\dfrac{1}{x})$　　**B.** $f'(-\dfrac{1}{x^2})$　　**C.** $\dfrac{1}{x}f'(\dfrac{1}{x})$　　**D.** $-\dfrac{1}{x^2}f'(\dfrac{1}{x})$

解析： 按复合求导公式得，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(f(\dfrac{1}{x}))=f'(\dfrac{1}{x})(\dfrac{1}{x})'=-\dfrac{1}{x^2}f'(\dfrac{1}{x})$，选 **D.**

注意记号 $f'(\dfrac{1}{x})$ 表示 $y=f(\dfrac{1}{x})$ 对 $\dfrac{1}{x}$ 求导，$[f(\dfrac{1}{x})]'$ 表示 $y=f(\dfrac{1}{x})$ 对 x 求导。

4. 若 $f(x)=e^{-2020x}$，则 $\displaystyle\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=$（　　）

A. $\dfrac{1}{x^{2020}}+C$　　**B.** $-\dfrac{1}{x^{2020}}+C$　　**C.** $-\ln x+C$　　**D.** $\ln x+C$

解析： $\displaystyle\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=\int f'(\ln x)d(\ln|x|)=\int f'(\ln x)d(\ln x)=f(\ln x)+C$

$=e^{-2020\ln x}+C=e^{\ln x^{-2020}}+C=x^{-2020}+C$，选 **A.**

这里用到 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的原函数，有 $\int f'(x)dx=f(x)+C$.

5. 设反常积分 $I_1=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$、$I_2=\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}dx$，则（　　）

A. I_1 与 I_2 都是收敛　　B. I_1 与 I_2 都发散　　C. I_1 收敛，I_2 发散　　D. I_1 发散，I_2 收敛

解析:因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x^2}=\infty$, 所以 I_1 与 I_2 都是瑕积分，且 $x=1$ 都是瑕点。

按牛莱公式，$I_1=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x\Big|_0^1=\lim\limits_{x\to 1^-}\arcsin x-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$，

$I_2=\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\lim\limits_{x\to 1^-}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-0)=-\infty$，选 C.

这里用到 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$，$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|+C$。

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

6. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{2x}=\frac{1}{3}$，则常数 $a=$______________。

解析：注意到当 $\varphi(x)\to 0$ 时，$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$，再用等价无穷小替换定理求极限，得

$\frac{1}{3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{2x}=\frac{a}{2}$, $a=\frac{2}{3}$。也可以用洛必达法则得到。

7. 已知 $y=e^{2x-1}$，则 $y^{(4)}(\frac{1}{2})=$______________。

解析：按复合函数求导公式和高阶导数的定义得

$y'=e^{2x-1}(2x-1)'=2e^{2x-1}$, $y''=(2e^{2x-1})'=2e^{2x-1}(2x-1)'=2^2e^{2x-1}$,

$y'''=(2^2e^{2x-1})'=2^3e^{2x-1}$, $y^{(4)}=(2^3e^{2x-1})'=2^4e^{2x-1}$，$y^{(4)}(\frac{1}{2})=2^4e^{2x-1}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=16$。

8. 曲线 $y=x^3-\frac{3}{5}x+2$ 的拐点坐标为______________。

解析：注意到拐点横坐标处的二阶导数不存在或等于 0，$y'=3x^2-\frac{3}{5}, y''=6x$，在函数 $y=x^3-\frac{3}{5}x+2$ 定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，二阶导数都能取函数值，即二阶导数不存在的点没有，故拐点横坐标处的二阶导数等于 0，令 $y''=6x=0$，得拐点横坐标 $x=0$，代入 $y=x^3-\frac{3}{5}x+2$ 得拐点纵坐标 $y=2$，得拐点坐标为（0,2）。

9. 已知$\int f(x)dx=\sin^2 x-2^{\sin x}+C$，则$f(x)=$______________。

解析： $f(x)=(\int f(x)dx)'=(\sin^2 x-2^{\sin x}+C)'=2\sin x(\sin x)'-2^{\sin x}\ln 2(\sin x)'$

$$=\sin 2x-\ln 2\cdot 2^{\sin x}\cdot\cos x\text{。}$$

这里用到求导公式：$(a^x)'=a^x\ln a$。

10. 定积分$\int_{-1}^{1}(1+x^{2020})(e^x-e^{-x})dx=$______________。

解析：注意到e^x-e^{-x}是奇函数，$1+x^{2020}$是偶函数，从而$(1+x^{2020})(e^x-e^{-x})$是奇函数，由奇函数关于原点对称区间上的定积分为 0 知，此定积分等于 0.

三、**解答题（每题 10 分，共 70 分）**

11. 求极限：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x+1}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln(1-x)]$。

解析：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x+1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\ln(\frac{x-2}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\ln(1+\frac{-2}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)(\frac{-2}{x})}=e^{-6}$；这里用到

当$\varphi(x)\to 0$时，$\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$，及等价无穷小替换定理求极限。

（2）先通分再用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln(1-x)]=\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{1-x}(1-x)'}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{x-1}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-1+1}{2x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(x-1)}=-\frac{1}{2}\text{。}$$

12. （1）设$y=\frac{x-1}{x+1}-\frac{\ln 2}{2}$，求$dy|_{x=0}$

（2）已知函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\ln t-1\\ y=\frac{1}{t}+1\end{cases}$（$t$为参数），求$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=1}$。

解析：（1）$\frac{dy}{dx}=(\frac{x-1}{x+1}-\frac{\ln 2}{2})'=\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$，

$dy|_{x=0}=\frac{2}{(x+1)^2}|_{x=0}dx=2dx$；

（2）$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$，$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{t^2}$，$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{t}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(-\frac{1}{t})'}{\frac{1}{t}}=\frac{1}{t^2}\cdot t=\frac{1}{t}$，得

$\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{t=1}=1$。

13. （1）求不定积分$\int\sin\sqrt{x}dx$；

（2）设$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2},x\ge 0\\ 2x+1,x<0\end{cases}$，求定积分$\int_0^2 f(x-1)dx$。

解析：（1）令$t=\sqrt{x}$，得

$$\int\sin\sqrt{x}dx=\int\sin t\cdot 2tdt=-2\int td(\cos t)=-2(t\cos t-\int\cos tdt)=-2t\cos t+2\sin t+C$$

$=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$.

（2）$\int_0^2 f(x-1)dx \overset{t=x-1}{=\!=\!=} \int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0(2t+1)dt+\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=(t^2+t)\big|_{-1}^0+\arctan t\big|_0^1$

$=0-(1+(-1))+\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$。

14. 设函数$f(x)=\int_1^x\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t^2+1}}dt$，

（1）证明：函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加函数；

（2）求$f'(0)$、$f'(1)$及$(f^{-1})'(0)$。

解析：（1）函数$f(x)$定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=\frac{d}{dx}(\int_1^x\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t^2+1}}dt)=\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+1}}>0,x\in(-\infty,+\infty)$，

故函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加函数；

（2）$f'(0)=1$，$f'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}e}$；因为$f(1)=0$，所以根据反函数求导公式

$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\sqrt{2}e$。 注，这里用到反函数求导公式：若$y=f(x)$的反函数为

$x=f^{-1}(y)$，则反函数的导数为$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$。

15. 已知曲线 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}-y^3=2x$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在点（0,1）处的切线方程与法线方程。

解析：在方程 $e^{xy}-y^3=2x$ 两边同时对 x 求导得，$e^{xy}(y+xy')-3y^2y'=2$，解得

$y'=\dfrac{2-ye^{xy}}{xe^{xy}-3y^2}$，切线斜率为 $y'|_{x=0}=\dfrac{2-ye^{xy}}{xe^{xy}-3y^2}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\dfrac{1}{3}$，所以切线方程为

$y-1=-\dfrac{1}{3}(x-0)$，即 $y=-\dfrac{1}{3}x+1$；法线方程为 $y-1=3(x-0)$，即 $y=3x+1$。

16. 设函数 $f(x)$ 可积，且满足关系式 $f(x)=-x^4+\dfrac{30}{7}x^2\int_0^1 f(x)dx$，

（1）求 $f(x)$ 的表达式；（2）求函数 $f(x)$ 的极值。

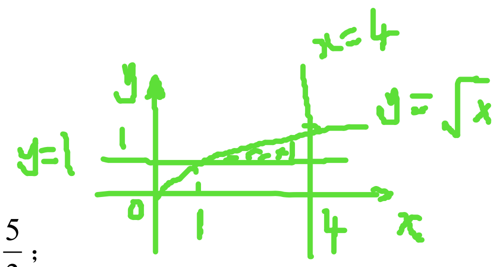
解析：（1）在 $f(x)=-x^4+\dfrac{30}{7}x^2\int_0^1 f(x)dx$ 两边对 x 从 0 到 1 积分，并注意到 $\int_0^1 f(x)dx$ 为常数，得 $\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1 x^4dx+\dfrac{30}{7}\int_0^1(x^2\int_0^1 f(x)dx)dx=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{30}{7}\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 x^2dx$，即 $\int_0^1 f(x)dx=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{10}{7}\int_0^1 f(x)dx$，解得 $\int_0^1 f(x)dx=-\dfrac{1}{5}\cdot(-\dfrac{7}{3})=\dfrac{7}{15}$，于是得到 $f(x)$ 的表达式 $f(x)=-x^4+2x^2$；

（2） $f'(x)=-4x^3+4x,\quad f''(x)=-12x^2+4$；令 $f'(x)=0$ 得驻点为 $x=0,-1,1$。

因为 $f''(0)=4>0,\quad f''(\pm1)=-8<0$，故极小值为 $f(0)=0$, 极大值为 $f(\pm1)=1$。

17. 已知平面图形由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=1,\quad x=4$ 围成，求

（1）该平面图形的面积；
（2）该平面图形绕x轴旋转一周所得到的旋转体的体积。



解析：（1）该平面图形的面积等于

$\int_1^4(\sqrt{x}-1)dx=(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x)\Big|_1^4=\dfrac{2}{3}\cdot8-4-(\dfrac{2}{3}-1)=\dfrac{14}{3}-3=\dfrac{5}{3}$；

（2）该平面图形绕x轴旋转一周所得到的旋转体的体积等于

$\int_1^4\pi[(\sqrt{x})^2-1^2)]dx=\pi(\dfrac{1}{2}x^2-x)\Big|_1^4=\pi[8-4-(\dfrac{1}{2}-1)]=\dfrac{9}{2}\pi$。