2019～ 2020 学年第一学期高等数学[(1)机电]

期末 A 卷参考答案及评分标准

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
C	**C**	**D**	**A**	**C**

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
$\frac{2}{3}$	16	（0，2）	$\sin 2x - 2^{\sin x}\cos x \cdot \ln 2$	0

三、解答题（本大题共 7 小题，每小题 10 分，总计 70 分）

11、解：（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-6)} \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)$ ……… (3 分)

$= \frac{1}{e^6}$ ……… (5 分)

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln(1-x)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1-x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1-x)}$ ……… (9 分)

$= -\frac{1}{2}$ ……… (10 分)

12、解：（1） $y' = \left(1-\frac{2}{x+1}-\frac{\ln 2}{2}\right)' = \frac{2}{(x+1)^2}$， ………(3 分)

$dy\big|_{x=0} = y'\big|_{x=0}dx = 2dx$ ……… (5 分)

（2） $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}}=-\dfrac{1}{t}$， ………(7 分)

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}}=\dfrac{1}{t}$， ……… (9 分)

故 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=1$ ………(10 分)

13、解： （1）$\int\sin\sqrt{x}dx\overset{令t=\sqrt{x}}{=}\int 2\mathrm{t}\sin tdt=-2t\cos t+\int 2\cos tdt$ ……… (3 分)

$=-2t\cos t+2\sin t+C$

$=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$ ………(5 分)

（2）方法一：$\int_0^2 f(x-1)dx\overset{令u=x-1}{=}\int_{-1}^1 f(u)du=\int_0^1\dfrac{1}{1+u^2}du+\int_{-1}^0(2u+1)du$ ……… (8 分)

$=\left[\arctan u\right]_0^1+\left[u^2+u\right]_{-1}^0=\dfrac{\pi}{4}$ ……… (10 分)

方法二：$f(x-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(x-1)^2} & x\geq 1\\ 2x-1 & x<1\end{cases}$ ……… (7 分)

$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_1^2\dfrac{1}{1+(x-1)^2}dx+\int_0^1(2x-1)dx$

$=\left[\arctan(x-1)\right]_1^2+\left[x^2-x\right]_0^1=\dfrac{\pi}{4}$ ……… (10 分)

14、解：（1）由于 $f(x)=\int_1^x\dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{t^2+1}}dt$，则 $f'(x)=\dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+1}}>0$ ………（4 分）

故 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加函数 ………（5 分）

$f'(x)=\dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+1}}$ 故 $f'(0)=1$，$f'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}e}$ ………（7 分）

由于 $f(1)=\int_1^1\dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{t^2+1}}dt=0$，故 $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}=\sqrt{2}e$ ………（10 分）

15、解：方程两边对 x 求导得 $e^{xy}(y+xy')-3y^2y'=2$，

得 $y'=\dfrac{ye^{xy}-2}{3y^2-xe^{xy}}$（可以不写出） ………（5 分）

把$x=0,y=1$代入得$y'\big|_{x=0}=-\dfrac{1}{3}$ ………（7 分）

故曲线$y=y(x)$在点$(0,1)$处的切线方程为$y-1=-\dfrac{1}{3}x$（或 $x+3y-3=0$ ）

在点$(0,1)$处的法线线方程为$y-1=3x$ （或 $3x-y+1=0$ ）………（10 分）

16、解：（1）令$k=\int_0^1 f(x)dx$，则$f(x)=-x^4+\dfrac{30}{7}kx^2$，

于是 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(-x^4+\dfrac{30}{7}kx^2\right)dx=\left[-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{10}{7}kx^3\right]_0^1=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{10}{7}k$，

故$k=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{10}{7}k$，则$k=\dfrac{7}{15}$.

所以$f(x)$的表达式为$f(x)=-x^4+2x^2$ ………（5 分）

（2）方法一：

令$f'(x)=-4x^3+4x=4x(1+x)(1-x)=0$，

得驻点$x=0,x=-1,x=1$………（7分）

又$f''(x)=-12x^2+4$，则$f''(0)=4>0$，$f''(\pm1)=-8<0$

故 $f(0)=0$为极小值 ，$f(\pm1)=1$为极大值 ………（10 分）

方法二：令$f'(x)=-4x^3+4x=4x(1+x)(1-x)=0$，得驻点$x=0,x=-1,x=1$………（7 分）

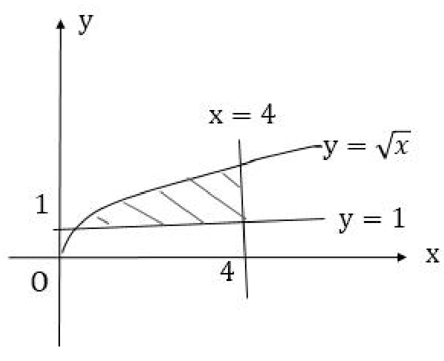
当$x>1$时，$f'(x)<0$；当$0<x<1$时，$f'(x)>0$ ；

当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$；当$x<-1$时，$f'(x)>0$

$f(0)=0$为极小值 ，$f(\pm1)=1$为极大值………（10 分）

17、解：这个图形如图所示：

（1）所求面积为



$A=\int_1^4(\sqrt{x}-1)dx$ ………（3 分）

$=\left[\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_1^4$ ………（4 分）

$=(\dfrac{16}{3}-4)-(\dfrac{2}{3}-1)=\dfrac{5}{3}$ ………（5 分）

（2）所求体积为$V=\int_1^4\left(\pi(\sqrt{x})^2-\pi\cdot1^2\right)dx=\pi\int_1^4(x-1)dx$

（或 $V=\int_1^4 \pi(\sqrt{x})^2 dx-\pi\cdot 1^2\cdot 3$ ）………（8 分）

$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^4$ ………（9 分）

$=\frac{9}{2}\pi$ ………（10 分）