

**2018～2019 学年第一学期高等数学[(1)机电]
期末试卷 B 参考答案及评分标准**

一、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

(1) e^{-2}	(2) -1	(3) -2	(4) $f'(e^x)e^x$	(5) $\frac{1}{2}$
(6) 3	(7) 0	(8) $y = -3$	(9) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}$	(10) $-\sin x + C$
(11) $\frac{\pi}{2}$	(12) 1	(13) 2	(14) $\frac{1}{6}$	(15) $\frac{14}{3}$

二、求解下列各题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

(16) 解：在方程 $y^3 + x^3 - \sin 3x + 6y = 0$ 两边同时对 x 求导，得

$$3y'y^2 + 3x^2 - 3\cos 3x + 6y' = 0, \quad y' = \frac{3\cos 3x - 3x^2}{3y^2 + 6}, \quad (4 \text{ 分})$$

当 $x = 0$ 时，由方程 $y^3 + x^3 - \sin 3x + 6y = 0$ 得 $y = 0$ ，得 $y'(0) = \frac{1}{2}$ (2 分)

得所求切线方程为 $y = \frac{1}{2}x$ ，法线方程为 $y = -2x$ 。 (2 分)

(17) 解：因为 $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$ ， (3 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(-\cot t)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\csc^2 t}{-\sin t} = \frac{-1}{\sin^3 t} \quad (4 \text{ 分}), \quad \text{故 } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = -1. \quad (1 \text{ 分})$$

(18) 解： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot e^{x^2}}{x e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{x e^{x^2}} \quad (4 \text{ 分})$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} = 2. \quad (4 \text{ 分})$$

(19) 解：令 $u = 1 + \ln x$ ，得 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} \quad (5 \text{ 分})$

$$= 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{1+\ln x} + C. \quad (3 \text{ 分})$$

(20) 解: 令 $t = \sqrt{x}$, 得 $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^2 \frac{t}{1+t^3} t dt = \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{1}{1+t^3} d(1+t^3)$ (5 分)

$$= \frac{2}{3} \ln|1+t^3| \Big|_0^2 = \frac{4}{3} \ln 3. \quad (3 \text{ 分})$$

(21) 解: 令 $t = x-1$, 得 $\int_0^2 f(x-1) dx = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 2t dt + \int_0^1 (3t-1) dt$ (5 分)

$$= t^2 \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{3}{2} t^2 - t \right) \Big|_0^1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \quad (3 \text{ 分})$$

(22) 解: $F(x) = \int_{-1}^x t(t-4) dt = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{7}{3}$, $F'(x) = x^2 - 4x$, $F''(x) = 2x - 4$,

驻点 $x=0, x=4$; (4 分)

因为 $F''(0) = -4 < 0$, $F''(4) = 4 > 0$,

故 $F(x)$ 有极小值 $F(4) = -\frac{25}{3}$, 极大值 $F(0) = \frac{7}{3}$. (2 分)

又 $F(-1) = 0$, $F(5) = -6$, 得 $F(x)$ 有最小值 $-\frac{25}{3}$, 最大值 $\frac{7}{3}$. (2 分)

(23) 解: 曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 的交点坐标为 $(0,0), (1,1)$,

(1) $S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}$; (4 分)

(2) $V = \int_0^1 \pi [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx = \frac{3}{10} \pi$. (4 分)

三、证明题 (本大题共 1 小题, 共 6 分)

(24) 证 根据积分中值定理知, 存在 $\xi \in [a, x]$, 使得 $\int_a^x f(t) dt = f(\xi)(x-a)$. 于是

$$F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - \int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2} = \frac{f(x)(x-a) - f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x-a}. \quad (4 \text{ 分})$$

因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单减, 故 $f(x) \leq f(\xi)$, 因此对 $\forall x \in (a, b)$, 有 $F'(x) \leq 0$. (2 分)