

生物医学工程(1) 高等数学(上)

第一次诊断性考试

考试时间：2019年12月26日

星期四晚上 19:00--21:00

试卷说明：

- 1: 该试卷由生物医学工程(1)班部分班委经过仔细研讨编写而成。
- 2: 所覆盖知识点范围包括《高等数学(同济大学第七版)》第一章至第五章的内容。
- 3: 为方便引导同学们的复习, 题目选择自刘仁斌老师所布置的1-10次平时作业, 上课教案例题, 《高等数学(理工类学习与指导练习册上册)》, 经过适当的优化整合而成。
- 4: 该套试卷适合于机电类考生自我检测, 其他高等数学类别仅仅供参考使用。
- 5: 该试卷总共分为21个小题, 由8个选择题, 5个解答题, 2个证明题目组成

试题部分：

注意：答题前请仔细阅读题目要求，控制好答题时间，答案直接写在试卷上，没有答题卡。

1. 设函数 $f(x+1) = \frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$, 则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x) = (\quad)$

- A. $\frac{x-1}{x}$, $x \neq 0$; B. $\frac{1}{1-x}$, $x \neq 1$; C. $\frac{1}{1+x}$, $x \neq -1$; D. $\frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$.

2. 设 n 为正整数, 则函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ ()

- A. 存在间断点 $x=1$; B. 存在间断点 $x=-1$; C. 存在间断点 $x=0$; D. 不存在间断点.

3. 下列求函数的极限中, 可以使用洛必达法则的是 ()

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$; B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{k}{x})^x$; C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$; D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

4. 设函数 $f(x) = x(x-2)(x-4)(x-6)$, 则方程 $f'(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有 () 个实根。

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 5x}{\ln \sin 2x} = ()$.

A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{2}{5}$ C. 1 D. ∞

6. e^x 的麦克劳林公式为 ()

A. $1 + x + x^2 + o(x^2)$

B. $1 + x + x^2 + o(x^n)$

C. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

D. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^n)$

7. 设 $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x, f(0) = 0$, 则 $f(x) = ()$

A. $\sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x$

B. $\sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$

C. $x + \frac{1}{2} x^2$

D. $x - \frac{1}{2} x^2$

8. 设 $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x, f(0) = 0$, 则 $f(x) = ()$

A. $\sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x$

B. $\sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$

C. $x + \frac{1}{2} x^2$

D. $x - \frac{1}{2} x^2$

填空题:

9 若函数 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) =$ _____;

10 已知 $f'(x) = \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$, 且 $f(-1) = 1$, 则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 的导数 $\varphi'(1) =$ _____

11 设 $y = \sqrt{\sin e^{x^2}}$, 求 y' . _____

12 求曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 的通过点 $(0, -4)$ 的切线方程和法线方程。 _____

13 函数 $y = x^4$ 在区间 $[1, 2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 则中值 $\xi =$ _____

14 函数 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的 6 阶麦克劳林公式中 x^2 的系数是 _____。

解答题 (以下解答题需要写出必要的步骤, 小可爱们切记哦哦)

15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2 \sin^2 x + x \tan^2 x} =$

16 求 $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$

$$17 \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} \circ$$

$$18 \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx =$$

19 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

20 求函数 $y = 2xe^{-x}$ 的单调区间、极值、凹凸区间和此函数对应图形的拐点。

证明题（请写出合理的证明步骤）

著名数学家丘成桐先生曾经说：我们数学家其实都不太会加减法的

其实你离证明 $1+1=2$ 就差一点点了，一点点啦。Fighting!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

21 例 设 $y = f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1, f(1)=0$ ，证明在 $(0,1)$ 内至少

存在一点 ξ ，使得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ 。

22、利用积分中值定理证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0$

