目录

一、求函数极限

i) 由易到难
   1. 定义
   2. 运算法则: 四则运算、复合

ii) 化繁为简
   1. 等价量替换
   2. 洛必达求导法则
   3. 泰勒展开: 转化为多项式或者有理分式

iii) 连续性：求极限

iv) 海涅定理：转化为数列极限 (反证)

v) 极限存在准则

1.1.1 由定义求函数极限

(i) 定义："$\epsilon-\delta$" 语言

- 自变量的 6 种极限过程：$x \to x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$;
  函数值的 4 种极限情况：$f(x) \to A, \infty, +\infty, -\infty$.
  - 无穷小：$A=0$
    $f(x) \to A \iff f(x)-A$是无穷小
  - 无穷小与无穷大：$A=0,\infty$
    $f(x)$是无穷小 $\iff \frac{1}{f(x)}$是无穷大$(f\neq 0)$
- 放大技巧：寻找 δ 时，恰当地放大

(ii) 单侧极限：$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff f(x_0^+)=f(x_0^-)=A$.

例如，分段函数。

(iii) 极限的几种性质：唯一性、局部有界性、局部保号性（证明题）

局部保号性：如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，

- $\forall x \in \mathring{U}(x_0), f(x) \geq 0 \Longrightarrow A \geq 0$;

  备注：增强条件为“$\forall x \in \mathring{U}(x_0), f(x) > 0$”，结论并不会增强，仍是“$A \geq 0$”。

  例如，$f(x) = |x|, x_0 = 0.$

- $A > 0 \Longrightarrow \exists \mathring{U}(x_0), \forall x \in \mathring{U}(x_0), f(x) > (\frac{A}{2}) > 0.$

1.1.2 函数极限的运算法则

(i) 四则运算

- 成立的条件：f, g 的极限存在；有限项
- 是必要条件：反之不成立。

$\surd$ 有理分式 $(a_0 a_i \neq 0, m \geq i \geq 0; b_0 b_j \neq 0, n \geq j \geq 0)$

$$lim_{x\to 0}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_ix^i}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_jx^j} = lim_{x\to 0}\frac{a_ix^i}{b_jx^j}$$

$$lim_{x\to \infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_ix^i}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_jx^j} = lim_{x\to \infty}\frac{a_0x^m}{b_0x^n}$$

(ii) 复合运算：$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = A$

- 成立条件 I：$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0, \lim_{u\to u_0} f(u) = A$，并且 $\forall x \in \mathring{U}(x_0,\delta), g(x) \neq u_0$.
  - $u_0 \in \mathbb{R}$：条件 "$\forall x \in \mathring{U}(x_0,\delta), g(x) \neq u_0$" 不可少；例如
    $$g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, f(u) = \begin{cases} |u| & u \neq 0 \\ 1 & u = 0 \end{cases},$$
    $$f(g(x)) = \begin{cases} |x\sin\frac{1}{x}| & x \neq 0, \frac{1}{n\pi}(n\in\mathbb{Z}) \\ 1 & x = 0, \frac{1}{n\pi}(n\in\mathbb{Z}) \end{cases}.$$
    $\lim_{x\to 0} g(x) = 0, \lim_{u\to 0} f(u) = 0$, 但是 $\lim_{x\to 0} f(g(x))$ 不存在。
  - $u_0 = \infty$：条件 "$\forall x \in \mathring{U}(x_0,\delta), g(x) \neq \infty$" 是多余的。
  - 理解为变量代换：令 $u = g(x)$，并且 $u \to u_0 (x \to x_0)$，则
    $$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u)$$
- 成立条件 II：$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$f$ 在 u_0 处连续。
  - 理解为极限符号 lim 与函数符号 f 可交换顺序：
    $$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))$$

1.2.1 用等价量替换:$\beta \sim \alpha \iff \beta = \alpha + o(\alpha)$

等价替换定理：$\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$，并且 $\lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$$

备注：对因子内部的 $\pm$ 不成立。例如

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \neq \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0;$$

实际上，$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{[x+o(x)]-[x+o(x)]}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3}$ 仍是未定式 $\frac{0}{0}$。

$\surd$ 基本初等函数的等价无穷小 $(x \to 0)$:

$\sin x \sim x$, $\quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\quad \tan x \sim x$;

$\arcsin x \sim x$, $\quad \arctan x \sim x$;

$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$, $\quad e^x - 1 \sim x$;

$\log_a(1+x) \sim x \cdot \frac{1}{\ln a}$, $\quad \ln(1+x) \sim x$; $\quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

1.2.2 洛必达法则：只对“未定式”成立

(i) 基本类型：$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

- 对自变量的 6 种极限过程都成立：
  $x \to x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$
- $x \to +\infty : \log_a x < x^\alpha < a^x (a > 1, \alpha > 0)$

(ii) 其它类型：转化为未定式 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

- $\infty - \infty$：通分
- $0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$：幂指函数 $u(x)^{v(x)} (u(x) > 0)$，先取对数

$$\lim u(x)^{v(x)} = \lim e^{v(x) \ln u(x)} = e^{\lim v(x) \ln u(x)}$$

备注：

- 洛必达法则只对“未定式”成立;
- 洛必达法则是必要条件，反之不成立.

1.2.3 带 Peano 余项的泰勒定理：转化为多项式

展开到恰当的次数

(i) 不多: 计算量最小

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)\right)-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^5+o(x^5))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3))}{x^3}=\frac{1}{2}$$

(ii) 不少: 能得出有效的结果

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x^2))-(x+o(x^2))}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^3}=?(\text{仍是未定式 }\frac{0}{0})$$

备注：

(i) 在点 x_0 处展开：如果自变量的极限过程是 $x \to \infty$，先做变量代换 $t = \frac{1}{x}$.

(ii) $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n) \neq 0$

(iii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f \pm g}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{[\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)] \pm [\cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)]}{x^n}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f \cdot g}{x^n}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{[\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i + \cdots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!}\boxed{x^p} + o(x^p)] \cdot [\frac{g^{(j)}(0)}{j!}x^j + \cdots + \frac{g^{(q)}(0)}{q!}\boxed{x^q} + o(x^q)]}{x^n}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{[\cdot x^{i+j} \cdots + \cdot x^{p+j} + \cdots + o(x^{p+q})] + [\cdot x^{i+j} \cdots + \cdot x^{i+q} + \cdots + o(x^{p+q})]}{x^n}$$

只要"$p + j = n, q + i = n$" 就足够了。

√ 几种基本初等函数的麦克劳林公式（$x_0 = 0$）：

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1} + 0 + R_{2m}(x),$$

其中$R_{2m}(x) = o(x^{2m})$, 或$(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}(0 < \theta < 1)$;

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m} + 0 + R_{2m+1}(x),$$

其中$R_{2m+1}(x) = o(x^{2m+1})$, 或$(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}(0 < \theta < 1)$;

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x),$$

其中$R_n(x) = o(x^n)$, 或$\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(0 < \theta < 1)$;

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + R_n(x),$$

其中$R_n(x) = o(x^n)$, 或$(-1)^n\dfrac{1}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}x^{n+1}(0 < \theta < 1)$;

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + C_\alpha^2 x^2 + \cdots + C_\alpha^n x^n + R_n(x),$$

其中$R_n(x) = o(x^n)$, 或$C_\alpha^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}(0 < \theta < 1)$.

1.3 由连续性求函数极限

f 在点 x_0 处连续，则极限值 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- 例如，初等函数在定义区间上连续。

1.4 海涅定理：证明极限不存在

Heine 定理：$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$

$\iff \forall \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0 : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$

- 例如，证明 $\lim_{x\to\infty} x \sin x$ 极限不存在：

取 $x_n^1 = 2n\pi \to \infty$，则 $f(x_n^1) \to 0$；

取 $x_n^2 = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to \infty$，则 $f(x_n^2) \to \infty$; 而 $0 \neq \infty$.

总结：求函数极限的步骤

- 化简

  例如：通分，去掉 $\sqrt{\bullet}$，把收敛到非零极限的因式提出去，对幂指函数取对数。

- 等价量、洛必达法则
- 泰勒多项式

- 证明极限不存在：单侧极限，海涅定理

1.5 函数极限存在准则

- 夹逼准则：恰当地放大、缩小，使得放大、缩小后的函数仍然趋于同一个极限。
- （广义）单调有界收敛定理：针对自变量的 4 种单侧极限过程，即 $x \to x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$
- 柯西收敛原理：$\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \iff$

  $\forall \epsilon > 0, \exists \mathring{U}(x_0,\delta), s.t. \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}(x_0,\delta), |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$

  对自变量的 6 种极限过程 $x \to x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$ 都成立。

•2 个重要极限：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

二、求数列的极限

i) 由易到难

1. 定义
2. 运算法则: 四则运算

ii) 化繁为简

1. 等价量替换
2. Stolz 定理

iii) 海涅定理：转化为函数极限

iv) 极限存在准则

2.1 由易到难

(i) 定义："$\epsilon - N$" 语言

- 4 种极限情况：$x_n \to a, \infty, +\infty, -\infty$.
  - 无穷小：$a = 0$

    $x_n \to a \iff x_n - a$是无穷小
  - 无穷小与无穷大：$a = 0, \infty$

    x_n是无穷小 $\iff$ $\frac{1}{x_n}$是无穷大$(x_n \neq 0)$
- 放大技巧：寻找 N 时，恰当地放大
- 数列收敛 $\iff$ 任意子列也收敛：反证
- 数列极限的性质: 唯一性、有界性、保号性

(ii) 四则运算

- 成立的条件：x_n, y_n 的极限存在；有限项。例如

$$
\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+1+\cdots+1}{n} (n\text{个}1) \\
&\neq lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \cdots + lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \\
&= 0+0+\cdots+0 = 0
\end{aligned}
$$

- 是必要条件：反之不成立。

- 有理分式 $(a_0 b_0 \neq 0)$

$$
lim_{n\to\infty}\frac{a_0 n^i + a_1 n^{i-1} + \cdots + a_i}{b_0 n^j + b_1 n^{j-1} + \cdots + b_j} = lim_{n\to\infty}\frac{a_0 n^i}{b_0 n^j}
$$

2.2 化繁为简

（i）用等价量替换

等价替换定理：$x_n \sim \tilde{x}_n, y_n \sim \tilde{y}_n$，并且 $\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{y}_n}{\tilde{x}_n}$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{y}_n}{\tilde{x}_n}$$

备注：对因子内部的 $\pm$ 不成立。

- 几个等价量 (海涅定理)：

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}(n\to\infty), 1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}, \tan\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n};$$
$$\arcsin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \arctan\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n};$$
$$\sqrt[n]{a}-1 \sim \frac{1}{n}\cdot\ln a, \sqrt[n]{e}-1 \sim \frac{1}{n}; \log_a(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\ln a}, \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n};$$
$$(1+\frac{1}{n})^\alpha - 1 \sim \alpha\frac{1}{n}.$$

(ii) Stolz 定理：$\{y_n\}$ 是“严格”单调的无穷大，并且 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 存在或者是“定号”无穷大，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

- 可以处理未定式 $\frac{\infty}{+\infty},\frac{\infty}{-\infty}$.
- 对 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\infty$ 不成立。例如 $x_n=(-1)^n n, y_n=n$,

$$lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{1}=\infty,$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=(-1)^n$ 极限不存在。

- 是必要条件，反之不成立。
- $n\to+\infty:\log_a n<n^\alpha<a^n(a>1,\alpha>0)$

2.3 海涅定理：转化为函数极限

Heine 定理：$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$

$\iff \forall \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0 : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$

- 形式上和变量代换类似：形式上令 $x = x_n$，并且 $x \to x_0(n \to \infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

2.4 数列极限存在准则

- 夹逼准则：恰当地放大、缩小。
- （广义）单调有界收敛定理:（广义）单调、有界数列必收敛。
- 柯西收敛原理：数列收敛 $\iff$ 数列是柯西列，即 $\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^{+},\forall n,m>N,|x_n-x_m|<\epsilon$（实数系的完备性）
- 闭区间套定理：一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套，即 (i)$[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$,(ii)$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n,b_n]$，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$.
- $Bolzano-Weierstrass$ 定理：有界数列必有收敛子列。
- 确界存在原理：非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界。（实数系的连续性）

- 一个重要极限：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

三、函数的连续性

i) 连续性

1. 定义
2. 运算法则: 四则运算、反函数、复合函数
3. 初等函数的连续性

ii) 间断点

iii) 闭区间上连续函数

3.1 函数的连续性

(i) 定义：f 在点 x_0 处连续

- $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$:

  自变量的增量 $\Delta x = x - x_0$ 很小时，函数值的增量 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ 也很小。

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$:

  函数的极限值 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 等于函数值 $f(x_0)$.

备注：

- 局部性的概念：逐点定义连续性。
- 单侧连续：连续 $\Longleftrightarrow$ 左连续 + 右连续。
- 求函数极限：f 在点 x_0 处连续，则极限值 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 等于函数值 $f(x_0)$.

(ii) 四则运算

成立条件：f, g 连续；有限项

(iii) 反函数连续性定理：$y = f(x)$ 在区间 I_x 上严格单调、连续，则它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在区间 $I_y = f(I_x)$ 上连续。

(iv) 复合运算

(v) 初等函数的连续性

- 基本初等函数在定义域上连续；
- 初等函数在定义区间上连续。

  备注：

  - 初等函数的定义域可能包含孤立点，它在这些点处是不连续的。

    例如，$\arcsin(x^2 + 1)$ 的定义域是单点集 $\{0\}$，它在 0 处自然是不连续的。

  - 可以修正为：初等函数在定义域内连续。

3.2 间断点的分类

- 第一类：$f(x_0^-), f(x_0^+)$ 都存在，例如可去间断点、跳跃间断点；
- 第二类：$f(x_0^-), f(x_0^+)$ 至少有一个不存在，例如无穷间断点、振荡间断点。

备注：x_0 为间断点，也要求函数在 x_0 的某去心领域内有定义。

3.3 闭区间上的连续函数

$y = f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则

- 有界性定理、最值定理
- 零点存在定理

  条件：$f(a) \cdot f(b) < 0$
- 介值定理

总结：$y = f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则它的值域也是闭区间 $[m, M]$，其中 $m = \min f([a, b]), M = \max f([a, b])$.

- 一致连续性定理（*Cantor* 定理）

  备注：一致连续是全局性的概念。