

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1. 若函数 $f(x) = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3} \right)^{2020}$ 在自变量的某一变化过程中是无穷大，则自变量的变化趋势为（ ）

- (A) $x \rightarrow 0$ (B) $x \rightarrow 1$ (C) $x \rightarrow -3$ (D) $x \rightarrow \infty$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\tan \frac{x}{3}} & x \neq 0 (x \geq -1) \\ k & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $k =$ （ ）

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

3. 设 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ，其中函数 $f(x)$ 可导，则 $\frac{dy}{dx} =$ （ ）

- (A) $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ (B) $f'\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ (C) $\frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right)$ (D) $-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

4. 若 $f(x) = e^{-2020x}$ ，则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx =$ （ ）

- (A) $\frac{1}{x^{2020}} + C$ (B) $-\frac{1}{x^{2020}} + C$ (C) $-\ln x + C$ (D) $\ln x + C$

5. 设反常积分 $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 、 $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx$ ，则（ ）

- (A) I_1 与 I_2 都收敛 (B) I_1 与 I_2 都发散
(C) I_1 收敛， I_2 发散 (D) I_1 发散， I_2 收敛

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

6. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{2x} = \frac{1}{3}$ ，则常数 $a =$ _____.

7. 设 $y = e^{2x-1}$ ，则 $y^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____.

8. 曲线 $y = x^3 - \frac{3}{5}x + 2$ 的拐点坐标为_____.

9. 已知 $\int f(x) dx = \sin^2 x - 2^{\sin x} + C$ ，则 $f(x) =$ _____.

10. 定积分 $\int_{-1}^1 (1+x^{2020})(e^x - e^{-x}) dx =$ _____.

三、解答题（本大题共 7 小题，每小题 10 分，总计 70 分）

11. 求极限：(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{3x+1}$ ； (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \ln(1-x) \right]$.

12. (1) 设 $y = \frac{x-1}{x+1} - \frac{\ln 2}{2}$ ，求 $dy|_{x=0}$ ；

(2) 已知函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln t - 1 \\ y = \frac{1}{t} + 1 \end{cases}$ (t 为参数)，求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1}$.

13. (1) 求不定积分 $\int \sin \sqrt{x} dx$ ；

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x \geq 0 \\ 2x+1 & x < 0 \end{cases}$ ，求定积分 $\int_0^2 f(x-1) dx$.

14. 设函数 $f(x) = \int_1^x \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t^2+1}} dt$.

(1) 证明：函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加函数；

(2) 求 $f'(0)$ ， $f'(1)$ 及 $(f^{-1})'(0)$.

15. 已知曲线 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} - y^3 = 2x$ 确定，求曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程与法线方程.

16. 设函数 $f(x)$ 可积，且满足关系式 $f(x) = -x^4 + \frac{30}{7} x^2 \int_0^1 f(x) dx$ ，

(1) 求 $f(x)$ 的表达式； (2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

17. 已知平面图形由曲线 $y = \sqrt{x}$ 与直线 $y=1$ ， $x=4$ 围成，求：

(1) 该平面图形的面积；

(2) 该平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积.