



# 第2章 电路的基本分析方法和基本定理

2.1 等效变换分析法

2.2 支路电流法

2.3 节点电压法

2.4 网孔电流法

2.5 叠加定理

2.6 等效电源定理

2.7 一阶动态电路的分析



# 第2章 电路的基本分析方法和基本定理

重点:

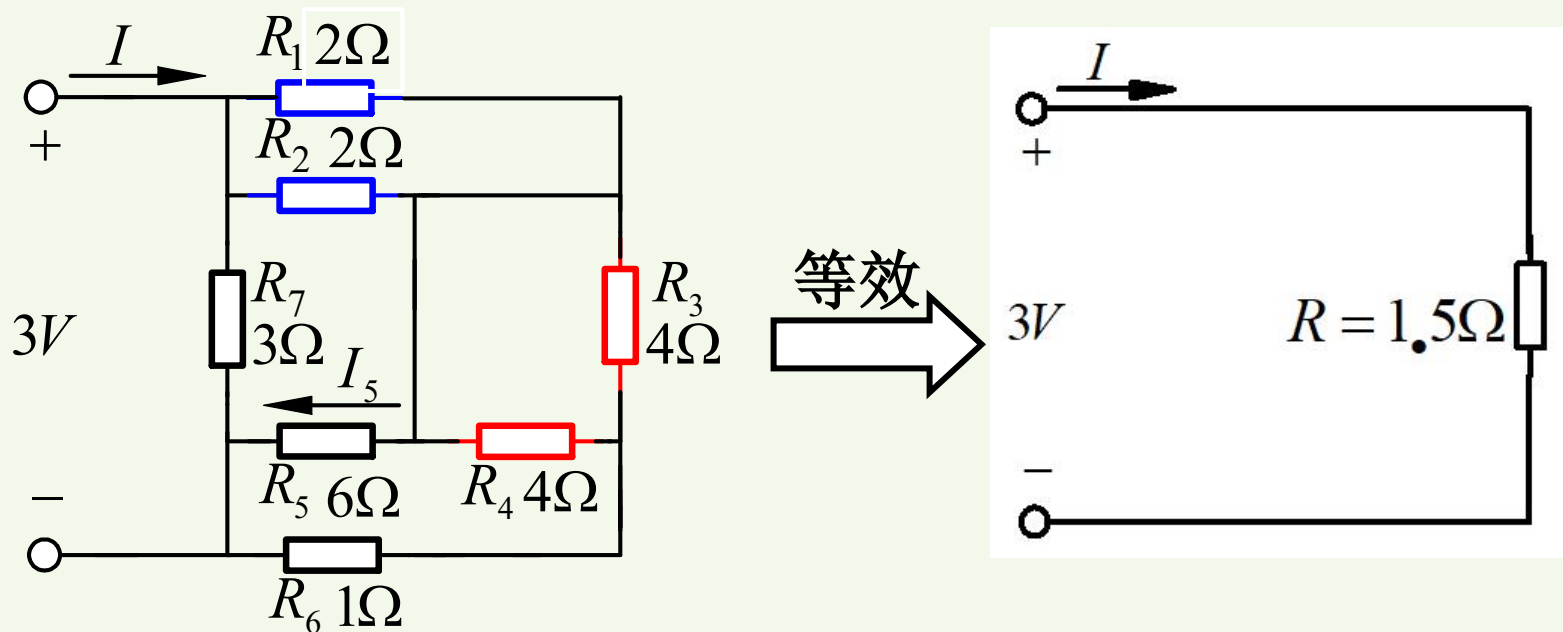
等效变换分析法

一阶动态电路的分析



## 2.1 等效变换分析法

电路的等效是电路分析中的重要概念，也是电路分析中常用的方法。应用等效变换可以将结构复杂的电路转换为结构简单的电路，从而使电路的计算得到简化。

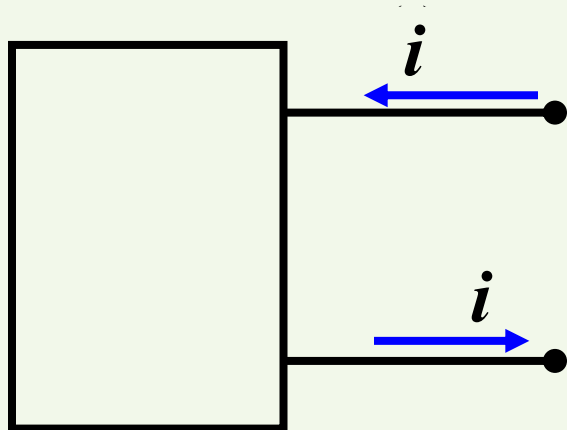
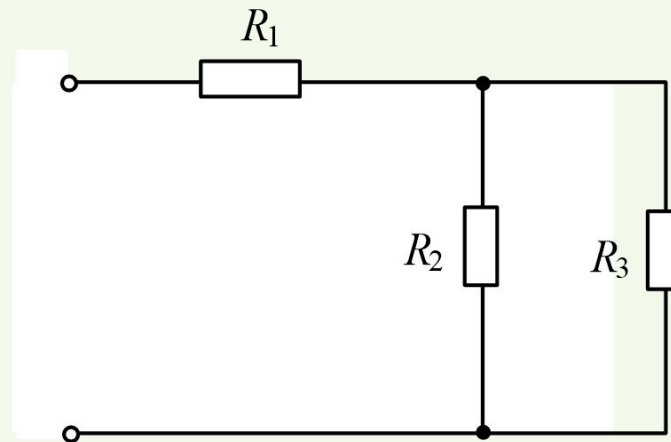
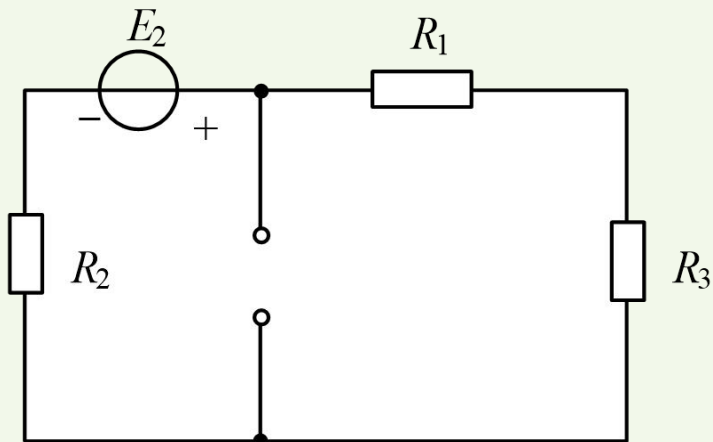


## 2.1 等效变换分析法

### 2.1.1 二端网络与等效

#### 二端（单口）网络

具有两个端子与外部相连的电路。

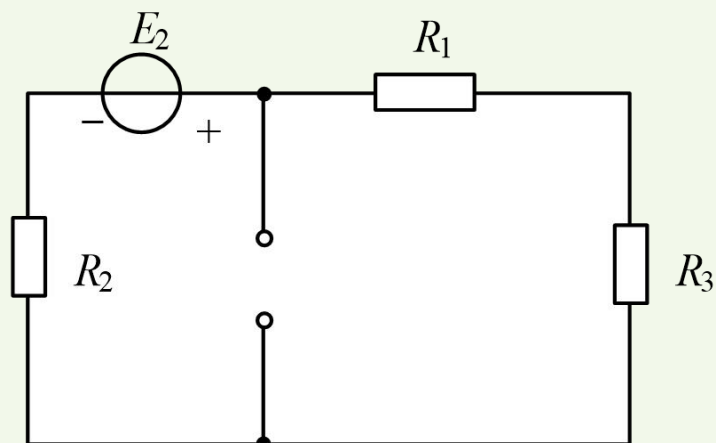
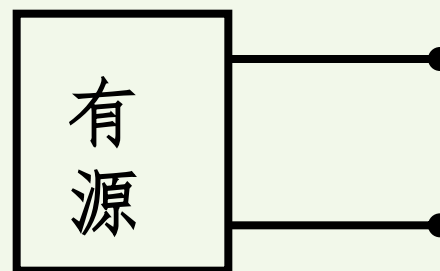
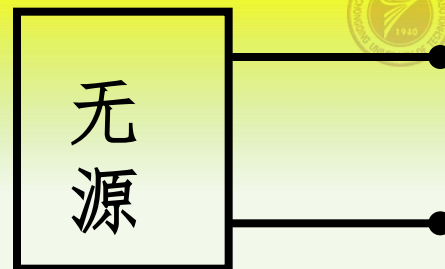
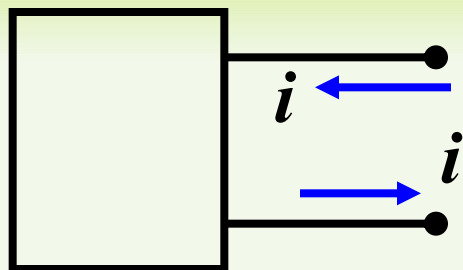


**特点：** 从一个端子流入的电流  
等于从另一端子流出的电流。

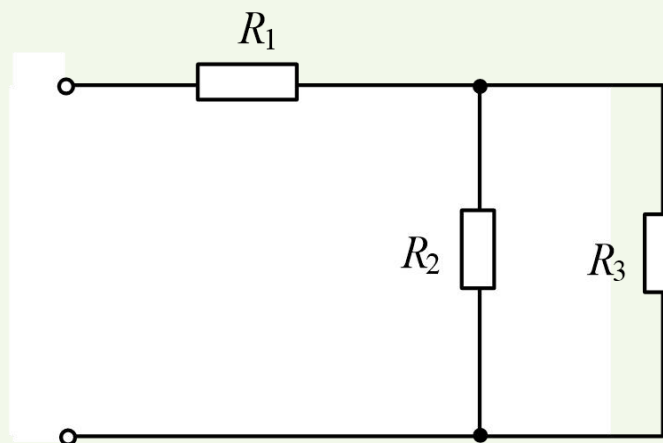




内部是否含有独立电源



有源二端网络



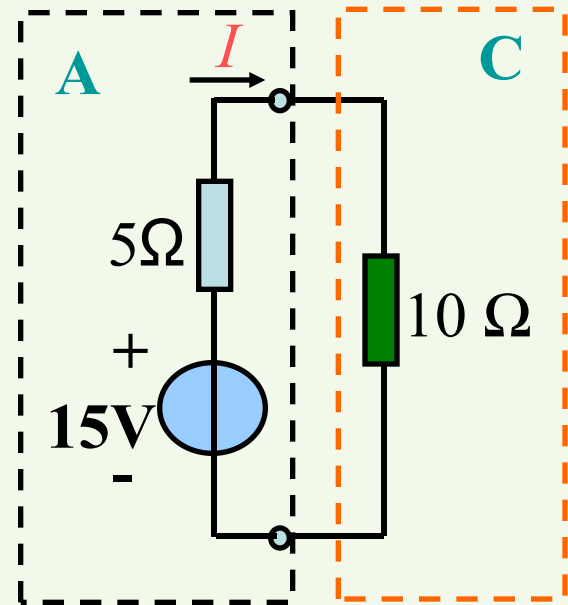
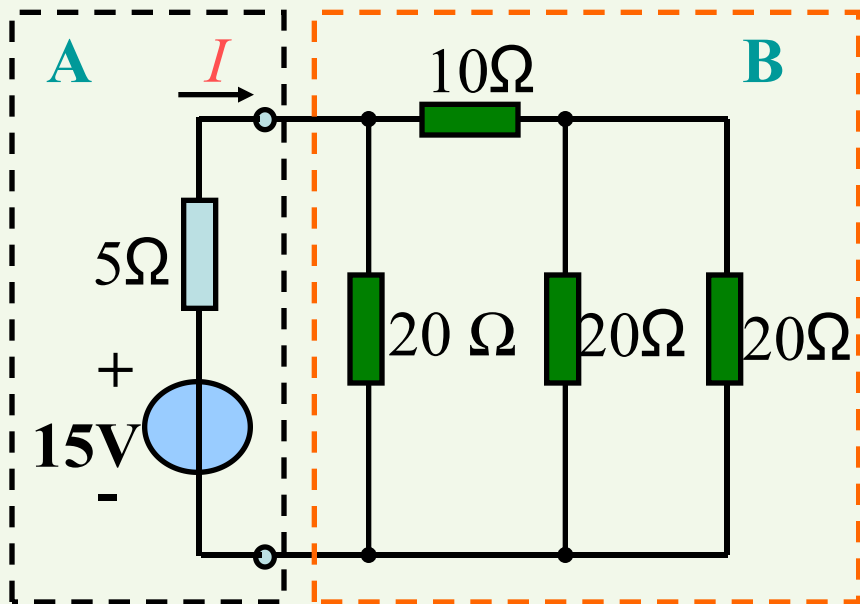
无源二端网络

# ◆ 等效的概念

## 1.问题的提出

什么是VCR?

Voltage-current relationship (VCR): 指电路中某一元件其两端所加电压与流过其电流的关系, 也称**伏安关系**。

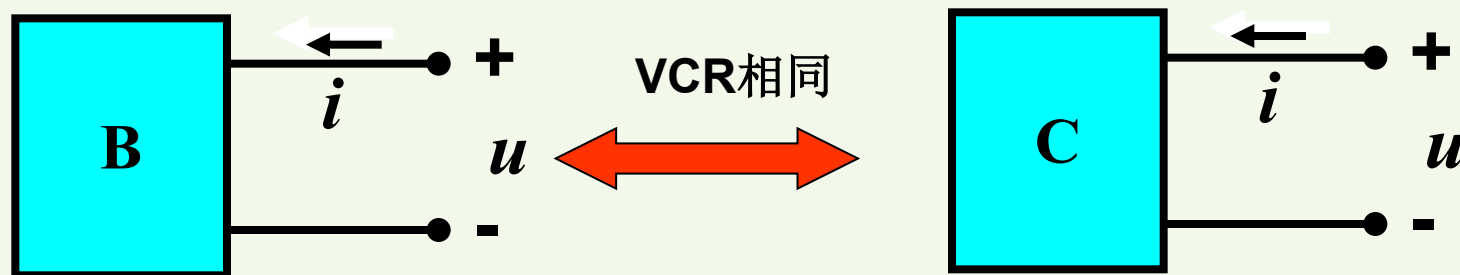


用C替代B后, A电路的任何电压、电流和功率都将维持与原电路相同, 则对A而言, C与B等效。

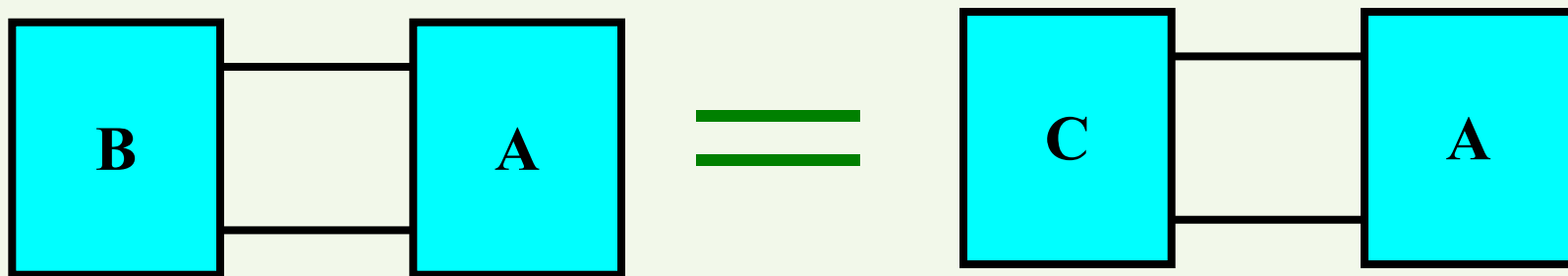
## ◆ 二端网络等效的条件



两个二端网络，若端口具有相同的电压、电流关系（VCR），则称它们对外等效。



对A电路而言，B和C所起的作用完全相同。

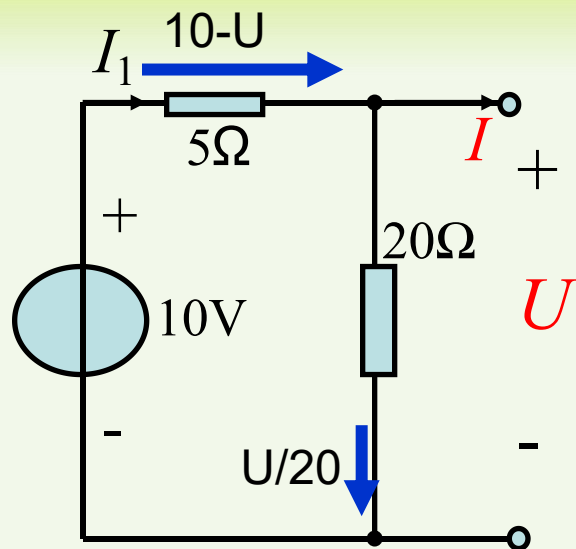


明确

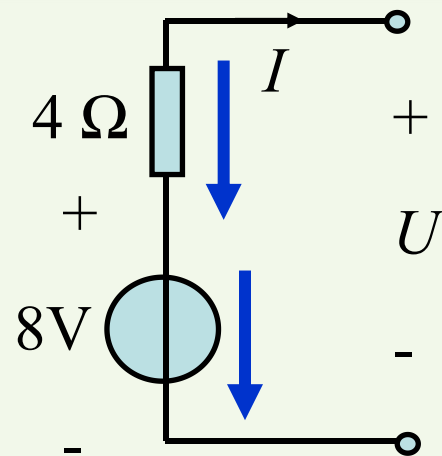
- (1) 电路等效变换的条件 → 两电路具有相同的VCR
- (2) 电路等效变换的对象 → 外电路
- (3) 电路等效变换的目的 → 简化电路，方便计算



## 求该电路的等效电路



等效



$U$ 为两个元件的电压之和

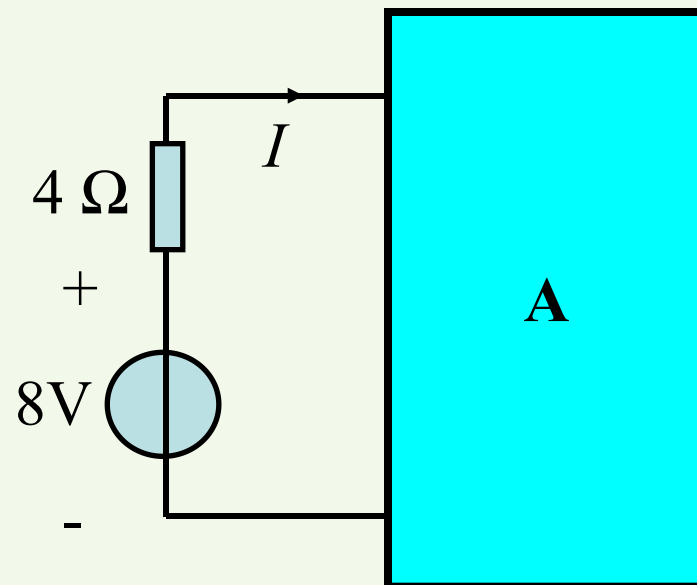
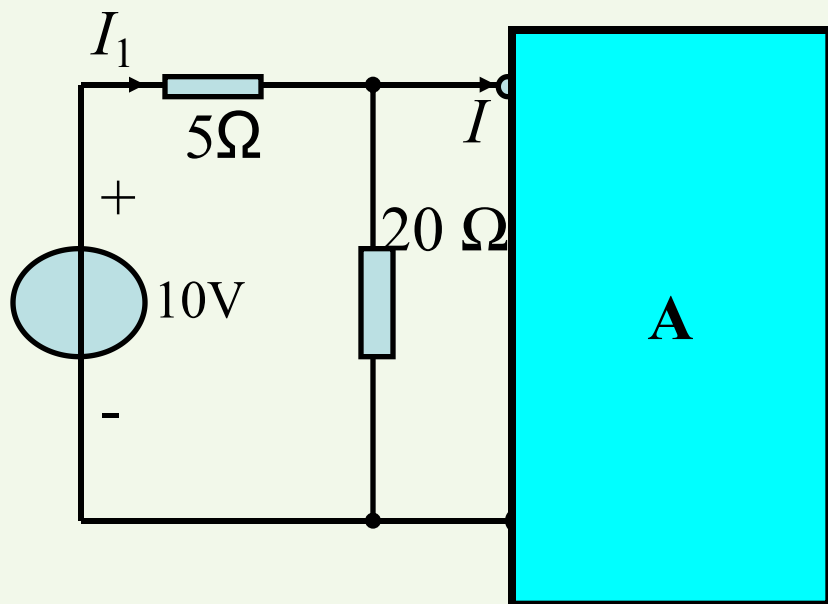
$$U=8-4I$$

根据KCL得:

$$I = I_1 - \frac{U}{20} = \frac{10-U}{5} - \frac{U}{20} = 2 - \frac{U}{4}$$

$$I_1 = \frac{10-U}{5}$$

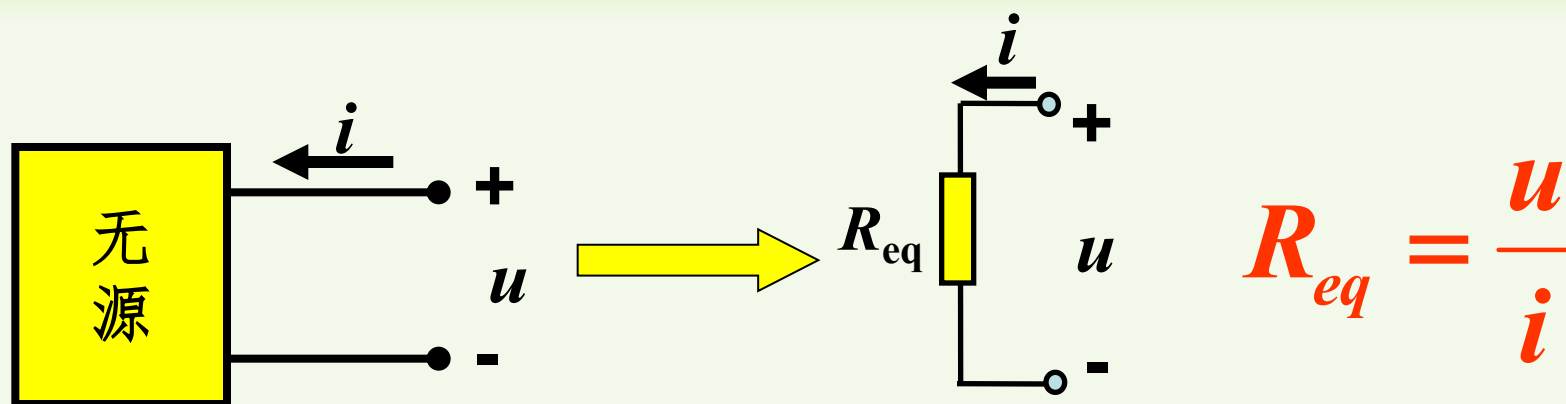
可求得VCR为:  $U=8-4I$



A电路的任何电压、电流和功率都将保持不变。

等效是对外电路A而言，对内并不等效！

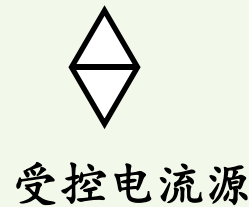
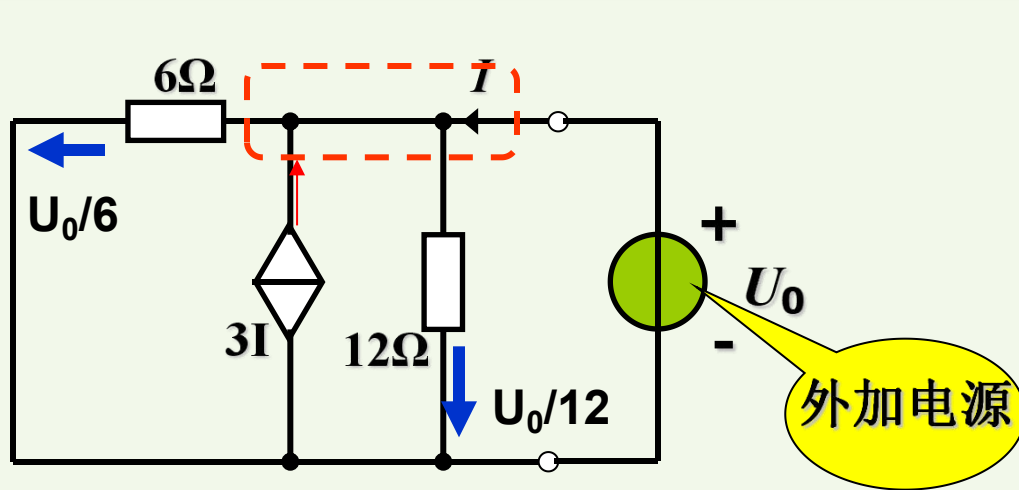
## 2.1.2 无源二端网络的等效



### 计算方法

- (1) 如果内部仅含电阻，则应用电阻的串、并联和  $\Delta$ —Y(三角-星形)变换等方法求它的等效电阻；
- (2) 对含有受控源和电阻的单口网络，用外加电源法。  
即在端口加电压源  $u$ ，求得电流  $i$ ，得其比值。

**例：**求图示无源单口网络的等效电阻。



$$\text{则 } R_{eq} = \frac{U_0}{I}$$

解：由KCL得：

$$3I + I = \frac{U_0}{6} + \frac{U_0}{12} \Rightarrow U_0 = 16I$$

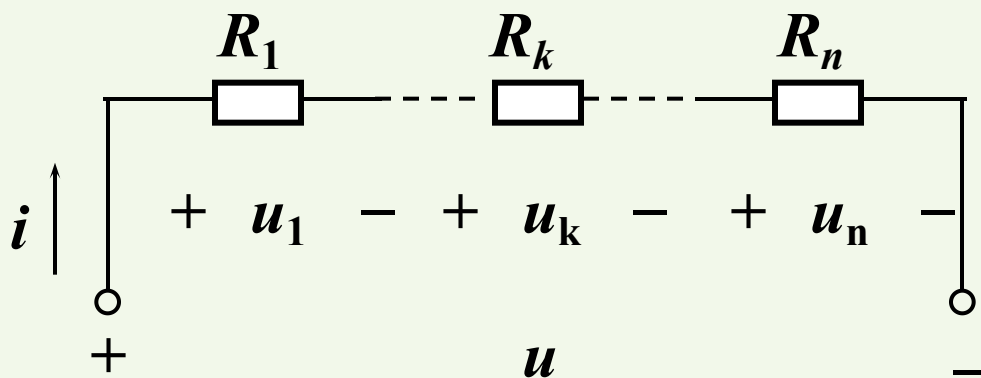
$$\therefore R_{eq} = \frac{U_0}{I} = 16\Omega$$



# ➤ 电阻的串并联等效

## 电阻的串联

### 1. 电路特点:



(a) 各电阻顺序连接，流过同一电流 (KCL);

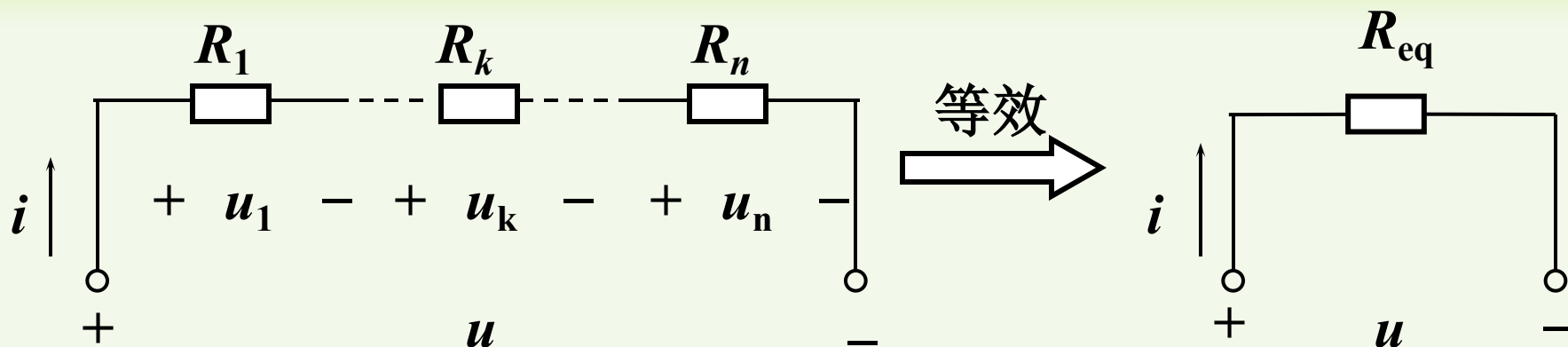
(b) 总电压等于各串联电阻的电压之和 (KVL)。

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots + u_n$$





## 2. 等效电阻 $R_{eq}$



左图:  $u = u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots + u_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_k + \dots + R_n) i$

右图:  $u = R_{eq} i$

$$\therefore R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum R_k$$

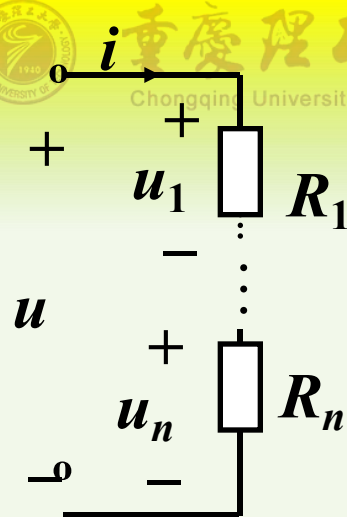
**结论:** 串联电路的总电阻等于各分电阻之和。

### 3. 串联电阻上电压的分配

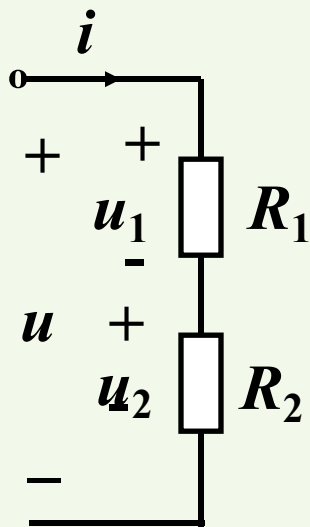
由 
$$\frac{u_k}{u} = \frac{R_k i}{R_{eq} i} = \frac{R_k}{R_{eq}} = \frac{R_k}{\sum R_j}$$

故有 
$$u_k = \frac{R_k}{\sum R_j} u$$

即 电压与电阻成正比



#### 两个电阻的串联分压

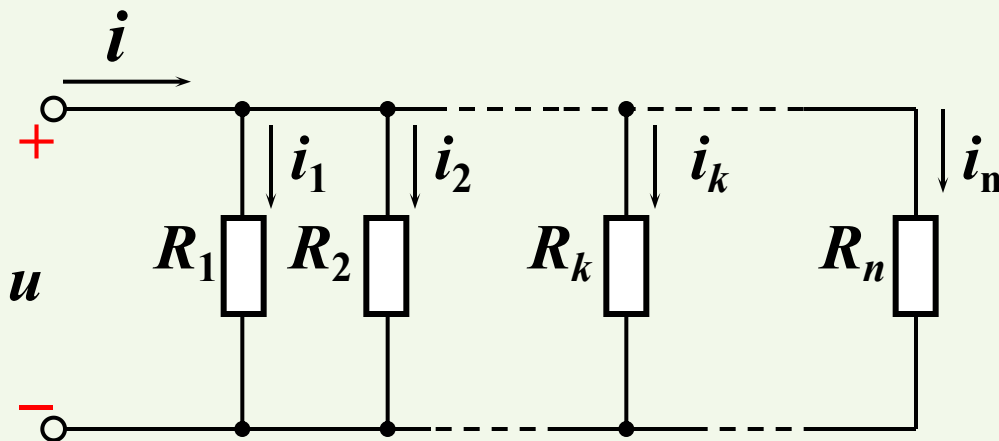


$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$



# 电阻的并联



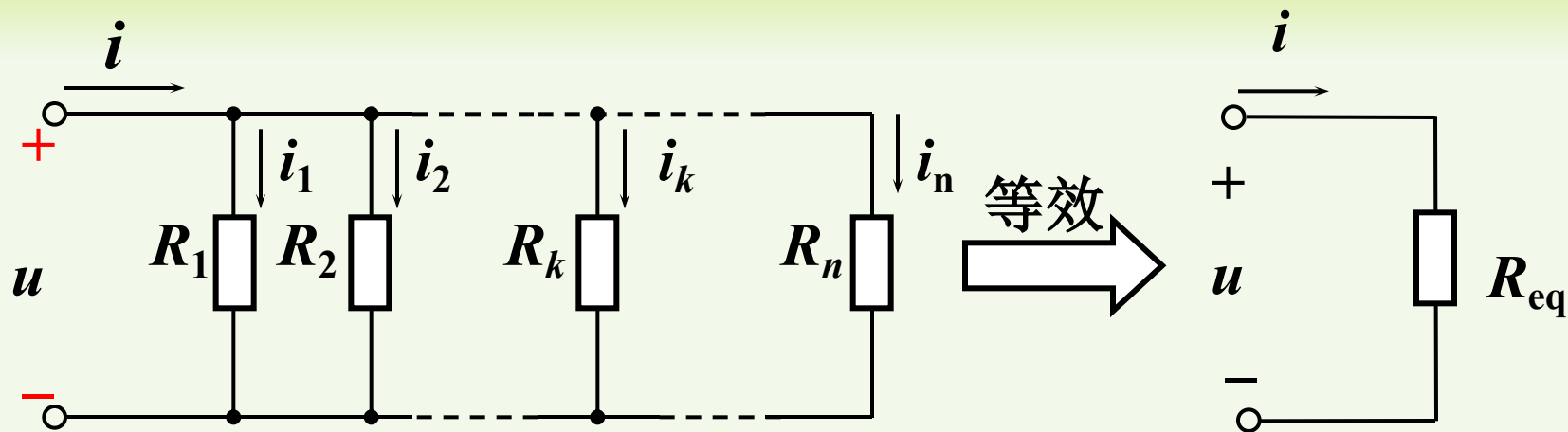
## 1. 电路特点:

- (a) 各电阻两端分别接在一起，两端为同一电压 (KVL)；
- (b) 总电流等于流过各并联电阻的电流之和 (KCL)。

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots + i_n$$



## 2. 等效电阻 $R_{eq}$



左图:  $i = i_1 + i_2 + \dots + i_k + i_n$

$$= u/R_1 + u/R_2 + \dots + u/R_n = u(1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n)$$

右图:  $i = u / R_{eq}$

可得:  $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n$

即  $G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_k + \dots + G_n = \sum G_k$

**结论: 并联电路的总电导等于各分电导之和。**

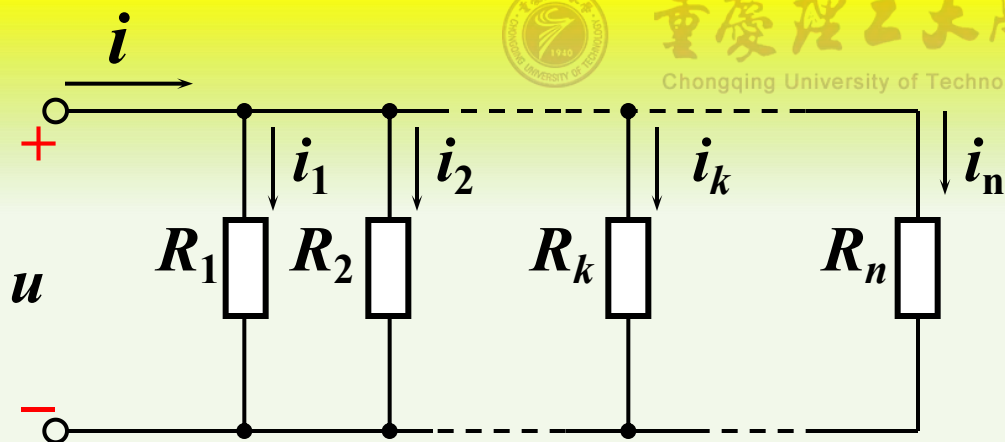


### 3. 并联电阻的电流分配

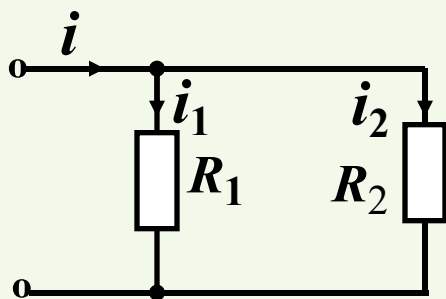
由 
$$\frac{i_k}{i} = \frac{u / R_k}{u / R_{eq}} = \frac{G_k}{G_{eq}}$$

知 
$$i_k = \frac{G_k}{\sum G_j} i$$

即 电流分配与电导成正比，与电阻成反比



两电阻的并联



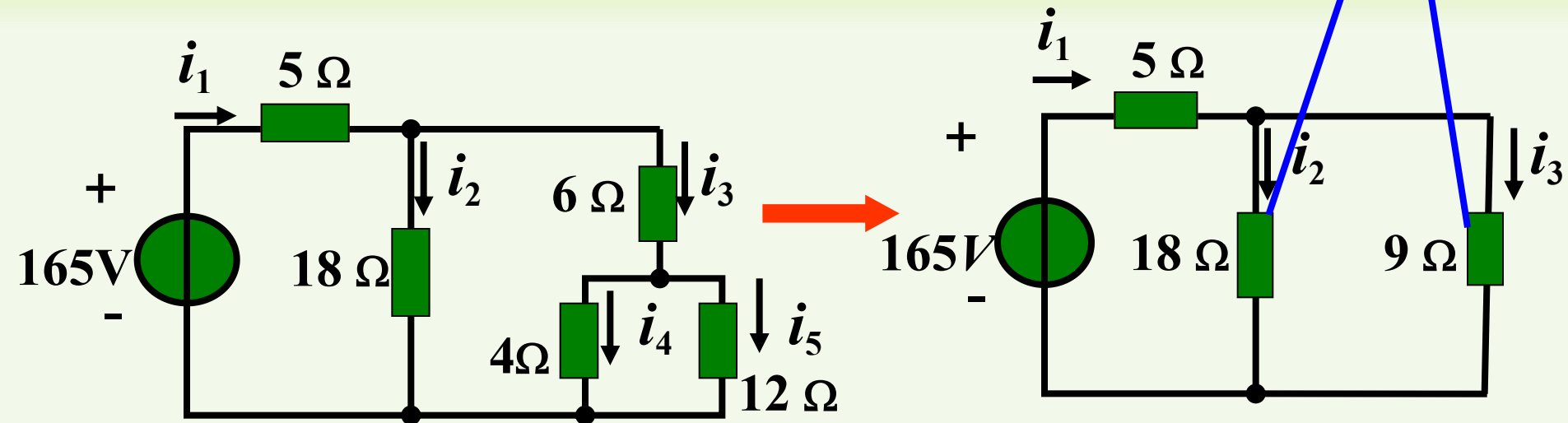
$$R = R_1 // R_2 = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$



## 例1 计算各支路电流。



$$i_1 = 165/11 = 15A$$

$$i_2 = \frac{9}{9+18} i_1 = 5A$$

$$i_4 = \frac{12}{4+12} i_3 = 7.5A$$

$$i_3 = \frac{18}{9+18} i_1 = 10A$$

$$i_5 = \frac{4}{4+12} i_3 = 2.5A$$

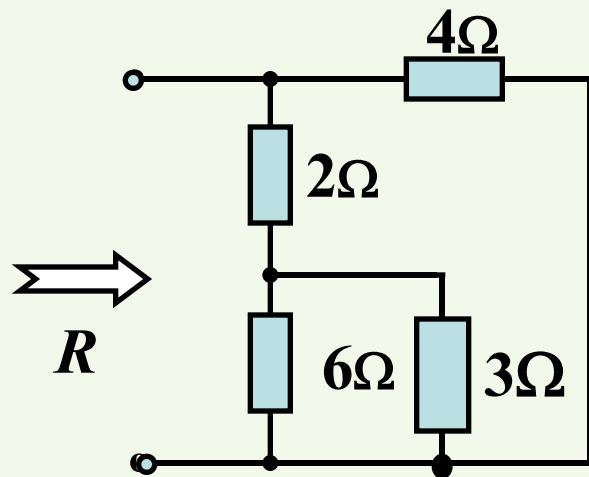


从以上例题可得求解串、并联电路的一般步骤：

- (1) 求出等效电阻或等效电导；
- (2) 应用欧姆定律求出总电压或总电流；
- (3) 应用欧姆定律或分压、分流公式求各电阻上的电流和电压

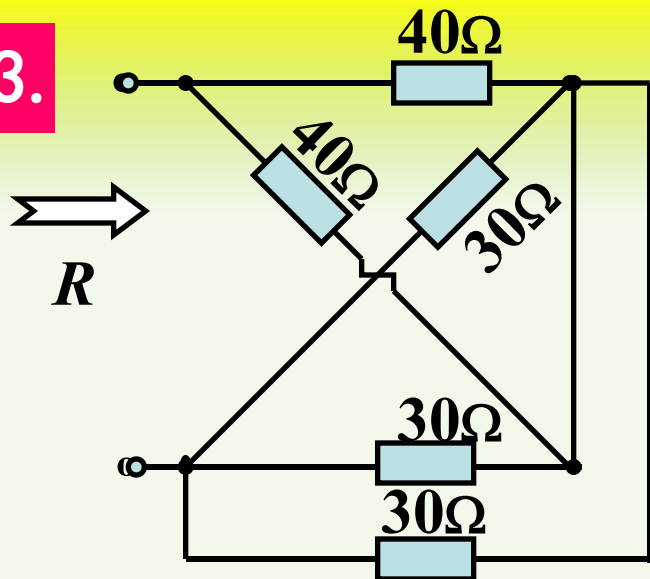
以上的关键在于识别各电阻的串联、并联关系！

例2

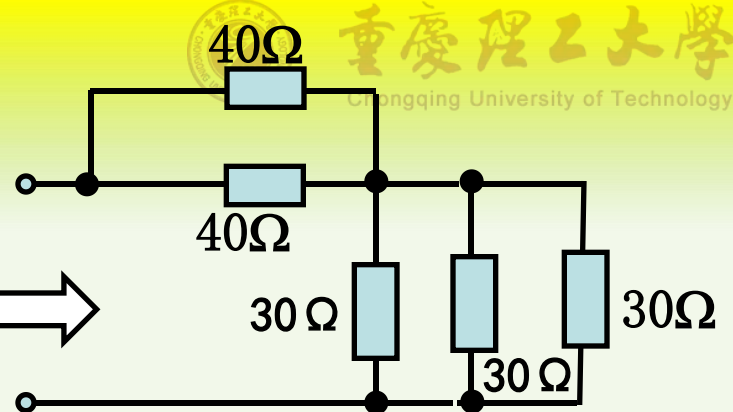
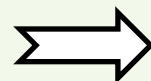


$$R = (2 + 6 // 3) // 4 = 2 \Omega$$

### 例3.



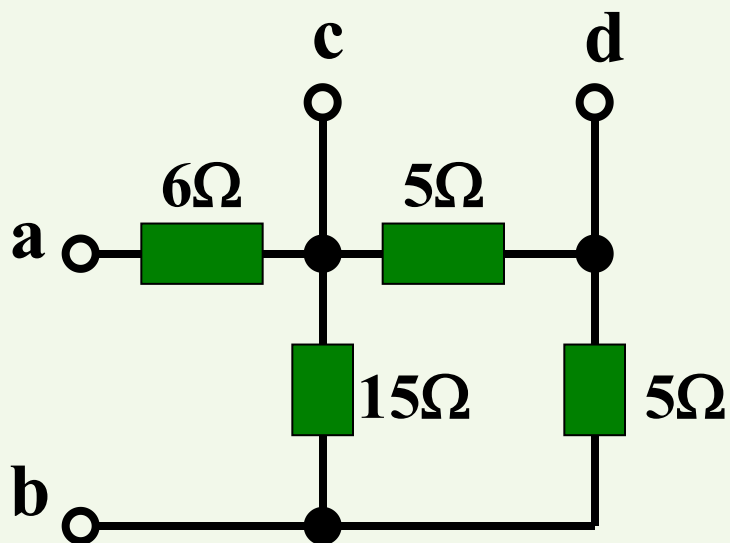
R



$$R = 40 // 40 + 30 // 30 // 30 = 30\Omega$$

### 例4

求:  $R_{ab}$ ,  $R_{cd}$



$$R_{ab} = 6 + 15 // (5 + 5) = 12\Omega$$

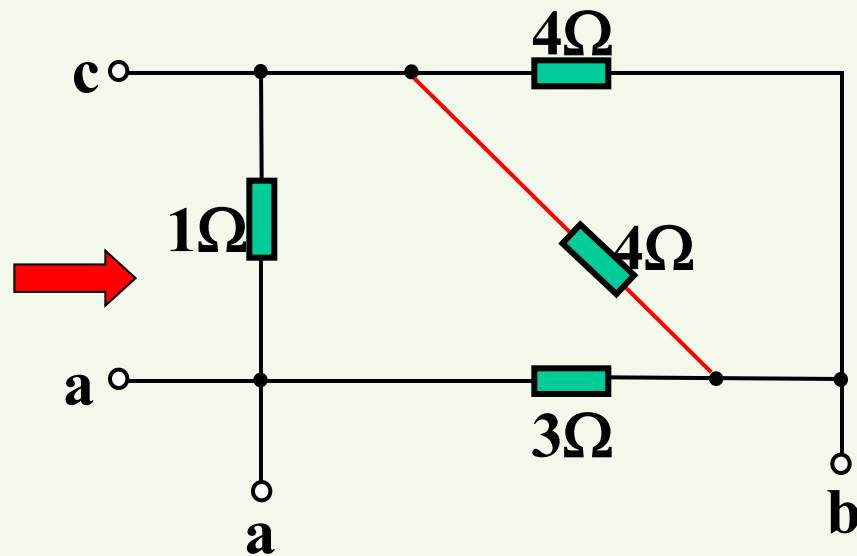
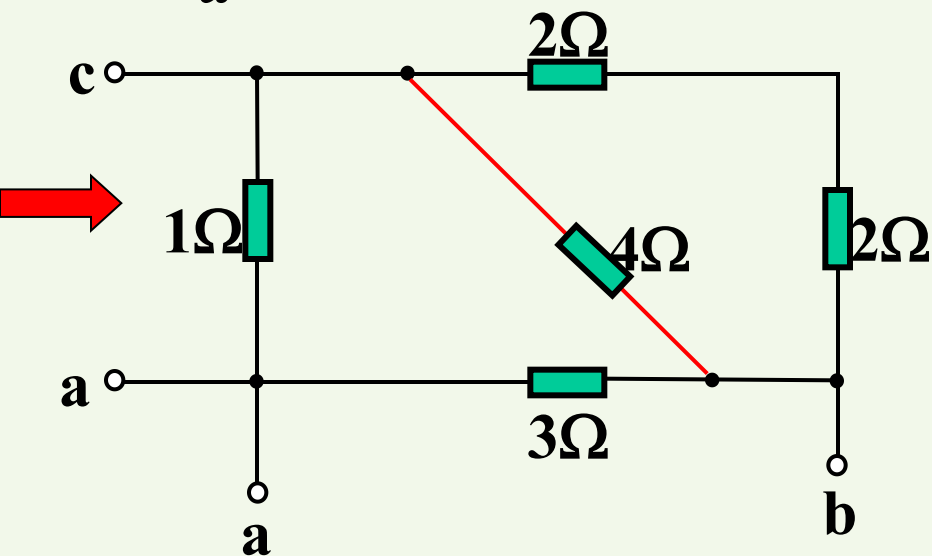
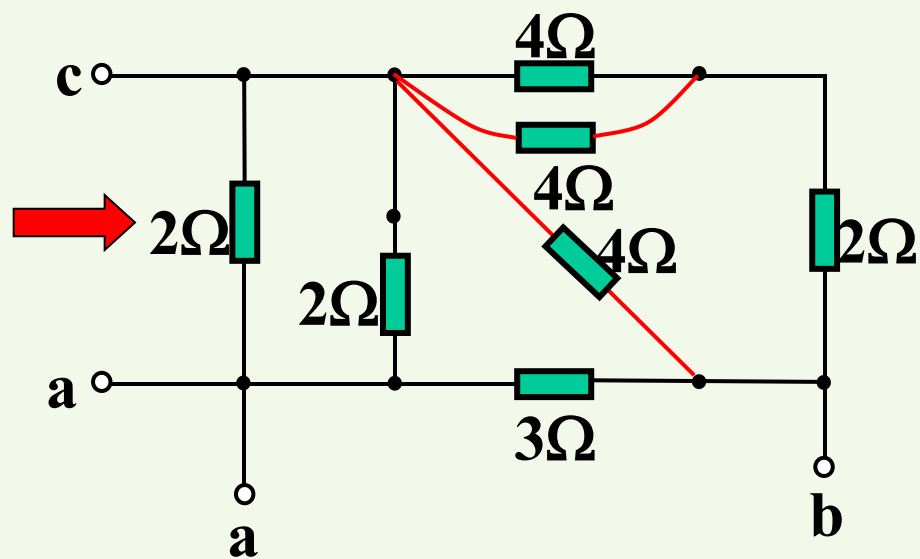
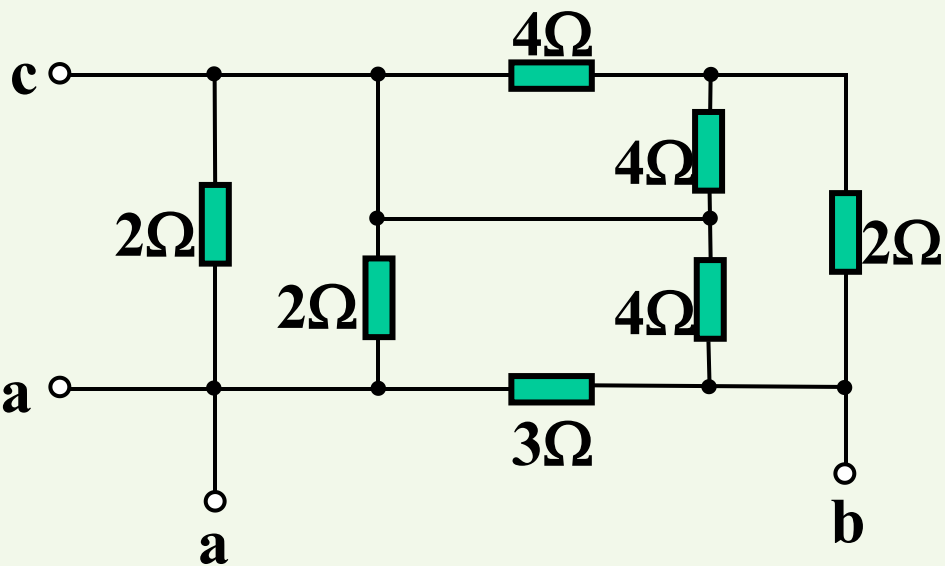
$$R_{cd} = 5 // (15 + 5) = 4\Omega$$

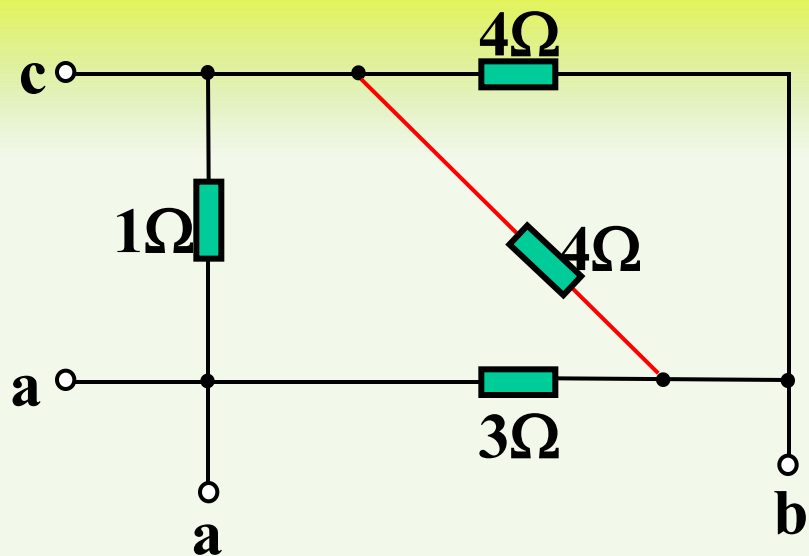
等效电阻针对电路的某两端而言，否则无意义。





例5 求 $R_{ab}$ 、 $R_{ac}$ 。





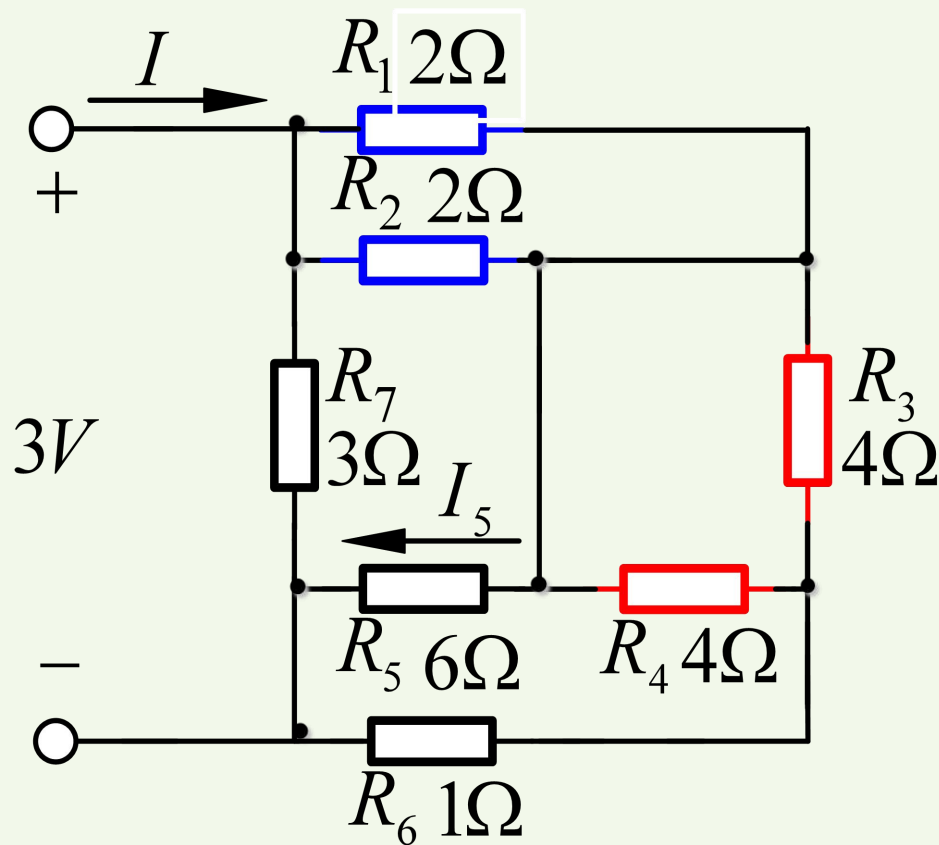
$$R_{ab} = 3 // (1 + 4 // 4) = 1.5\Omega$$

$$R_{ac} = 1 // (4 // 4 + 3) = \frac{5}{6}\Omega$$

## 例题2.1

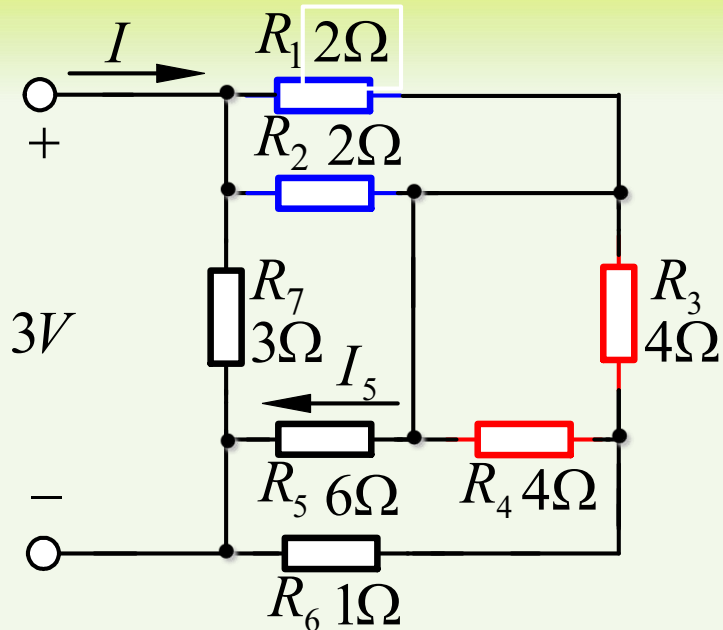


计算图中所示电阻电路的等效电阻 $R$ ，并求电流 $I$ 和 $I_5$ 。

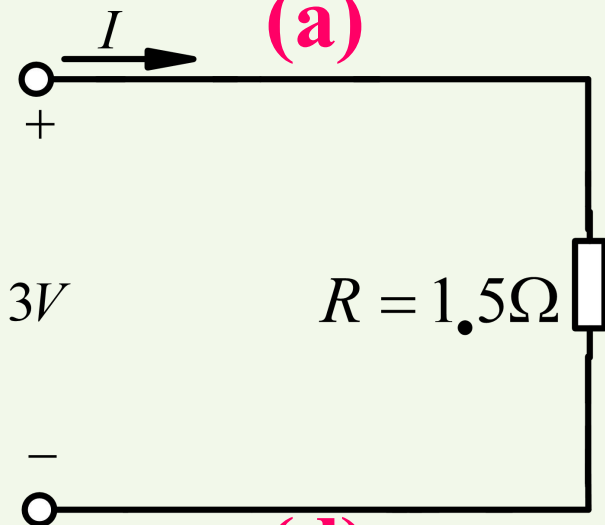


解

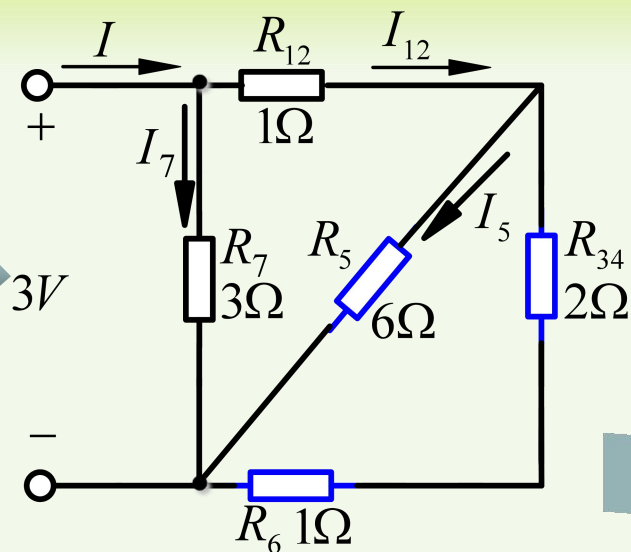
可以利用电阻串联与并联的特征对电路进行简化



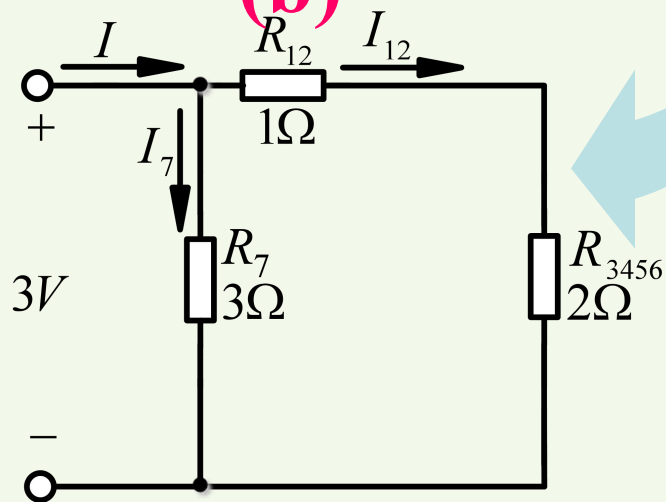
(a)



(d)



(b)



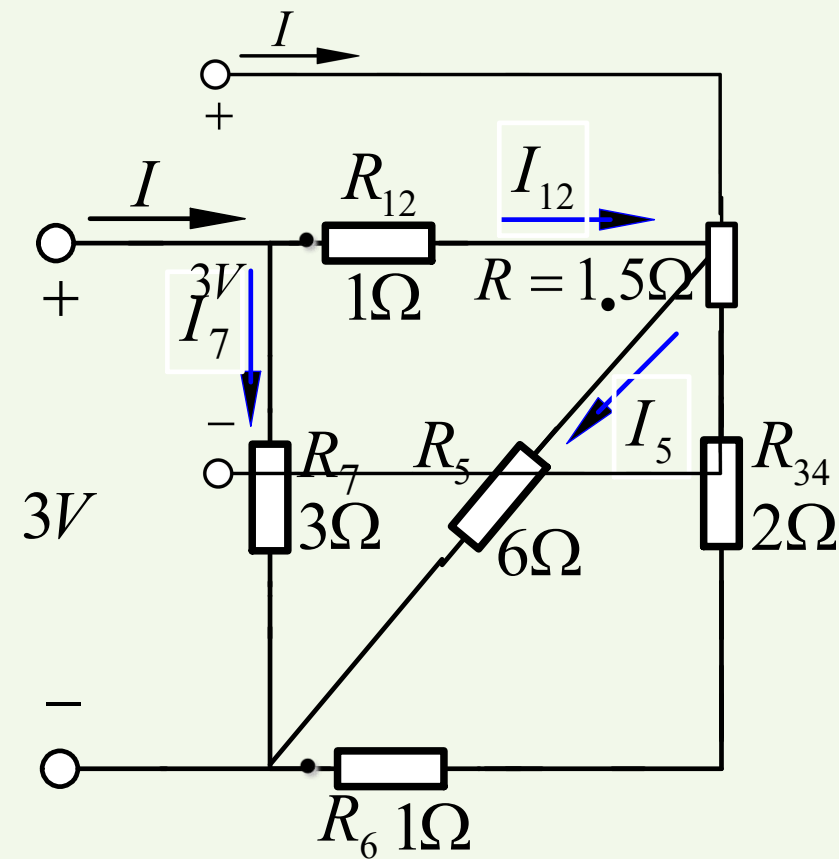
(c)



由(d)图可知

$$R = 1.5\Omega, \quad I = \frac{U}{R} = 2A$$

由(c) 图可知



(c)

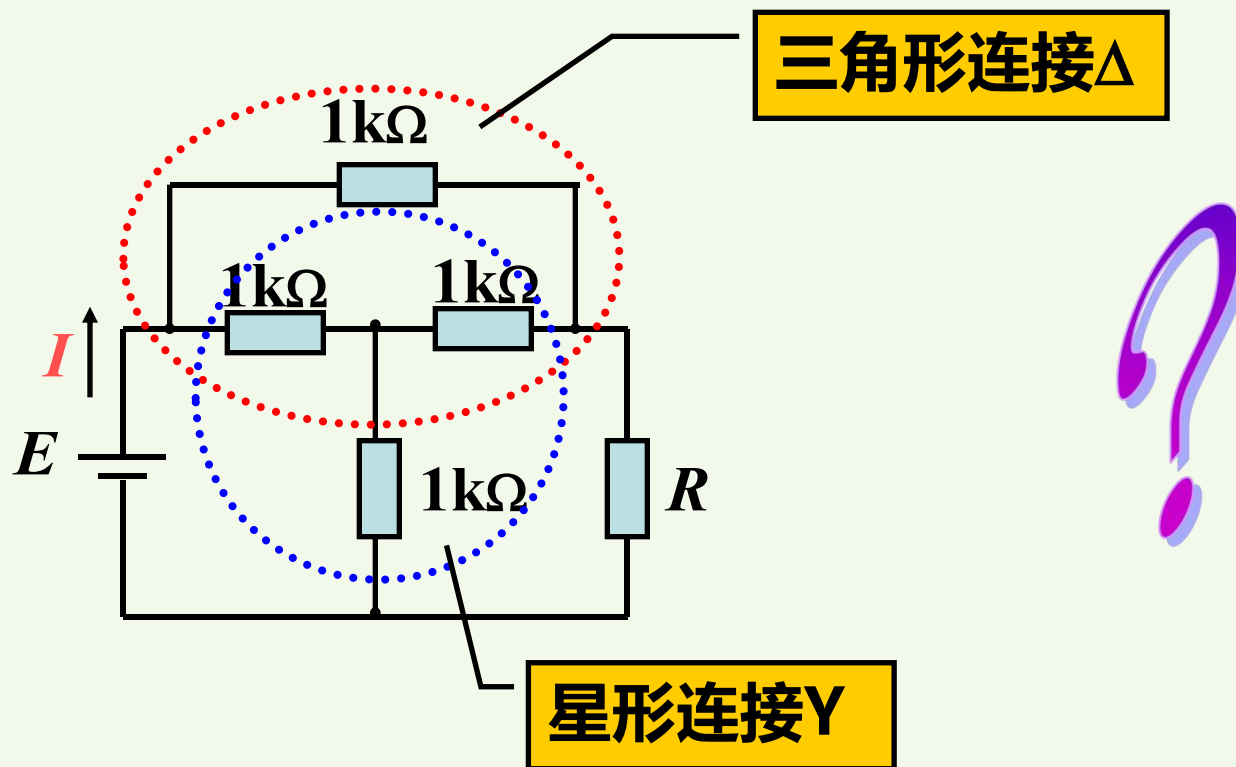
$$I_7 = \frac{U}{R_7} = 1A$$

$$I_{12} = I - I_7 = 1A$$

$$I_5 = \frac{R_{34} + R_6}{R_{34} + R_6 + R_5} I_{12} = \frac{1}{3} A$$

例

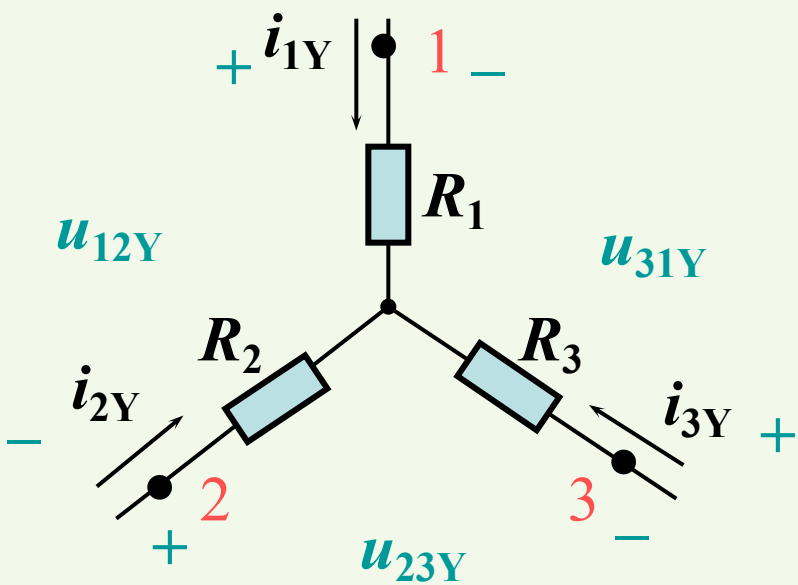
如图求 $I$ 。



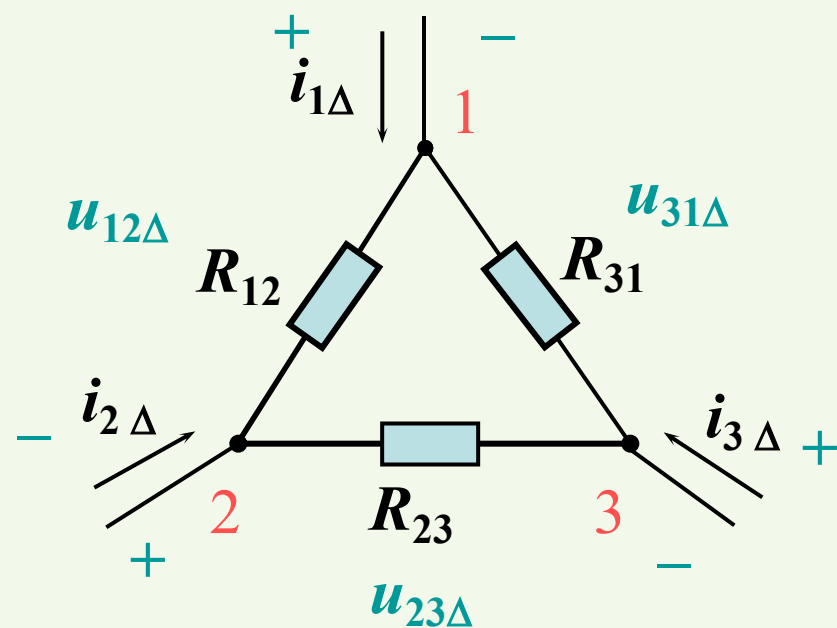


# 电阻的Y- $\Delta$ 等效变换

电阻的星形（Y形）联接

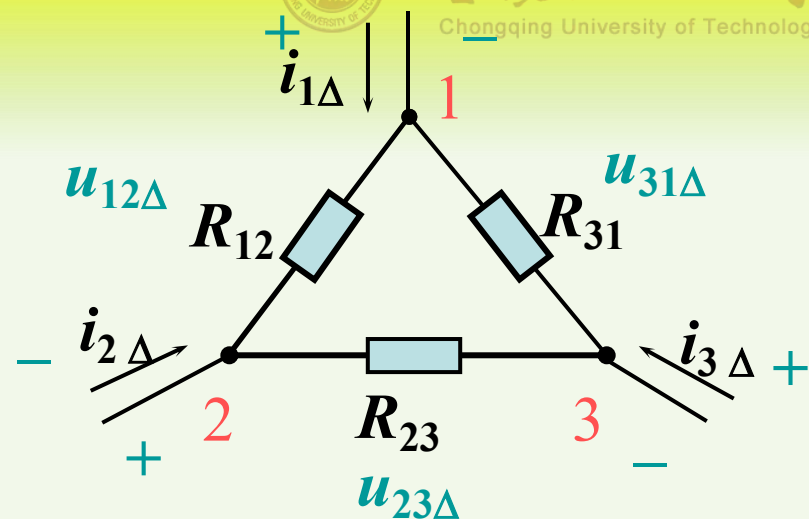
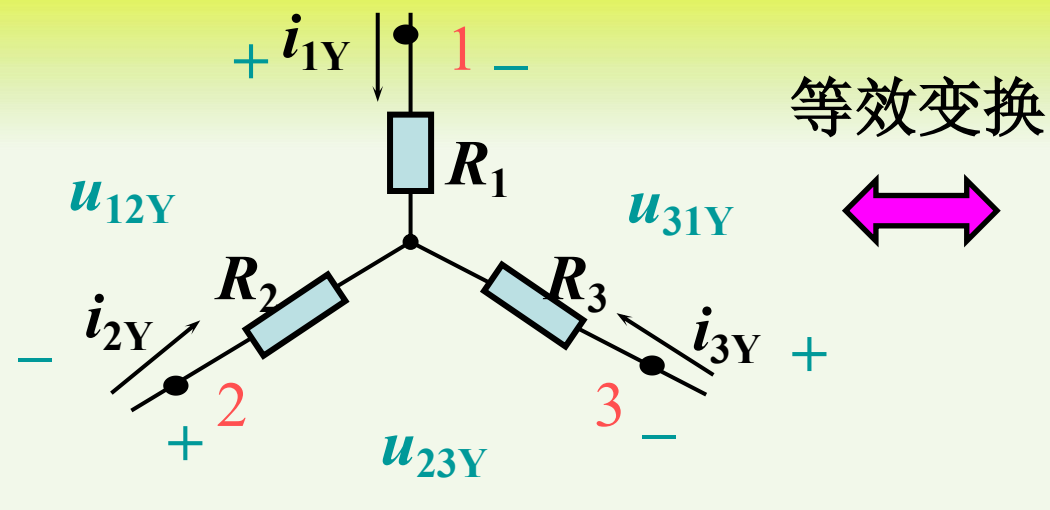


电阻的三角形（ $\Delta$ 形）联接



根据多端网络等效变换的条件，当**对应端口的电压、电流关系相同**时，则这两个电路**对外等效**。

通过数学方法可以证明，这两个电路**当它们的电阻满足一定的关系时，能够相互等效**。



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

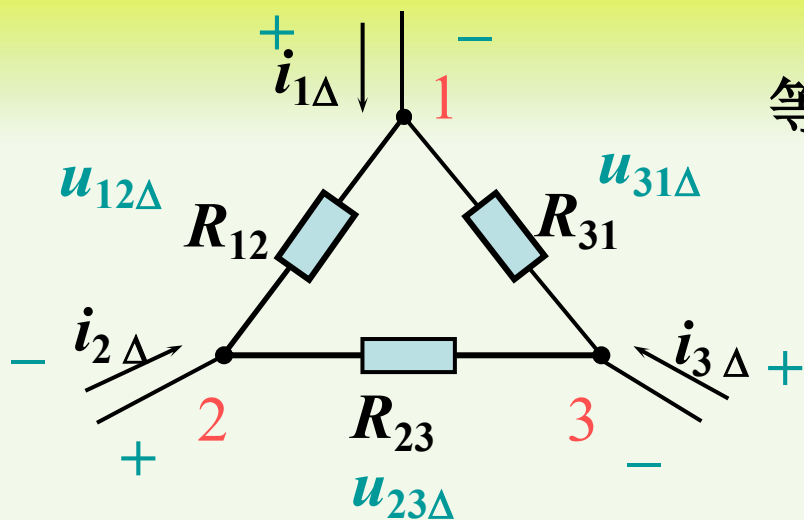
$$R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

由此可得 **Y  $\rightarrow$   $\Delta$**  的规律:

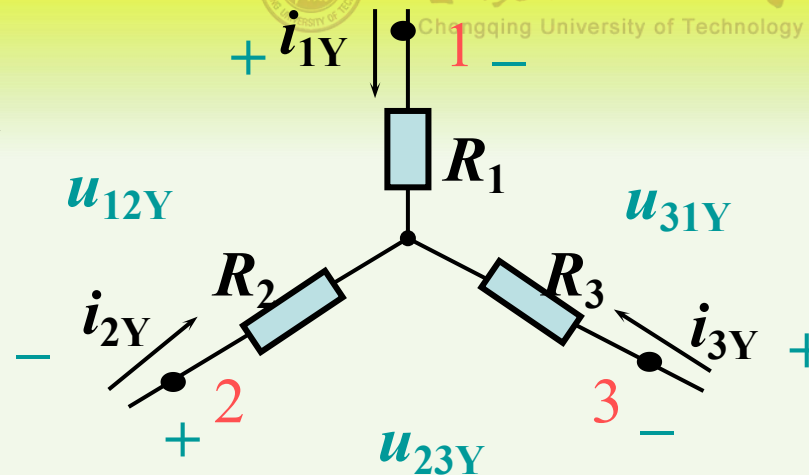
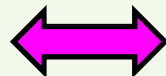
$$R_{mn} = \frac{\text{Y形电阻两两乘积之和}}{\text{不与} mn \text{端相连的电阻}}$$

若  $R_1=R_2=R_3=R$  时, 有  $R_{12}=R_{23}=R_{31}=3R$





等效变换



由此可得  $\Delta \rightarrow Y$  的规律:

$$R_i = \frac{\text{结于 } i \text{ 端两电阻乘积}}{\Delta \text{ 形三电阻之和}}$$

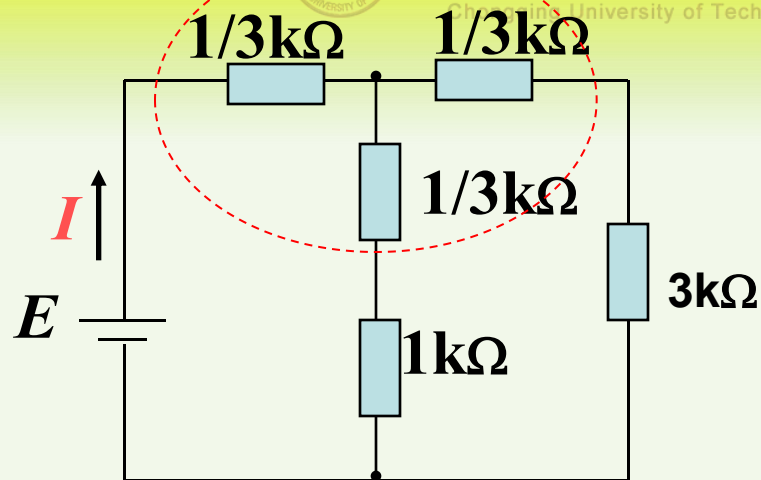
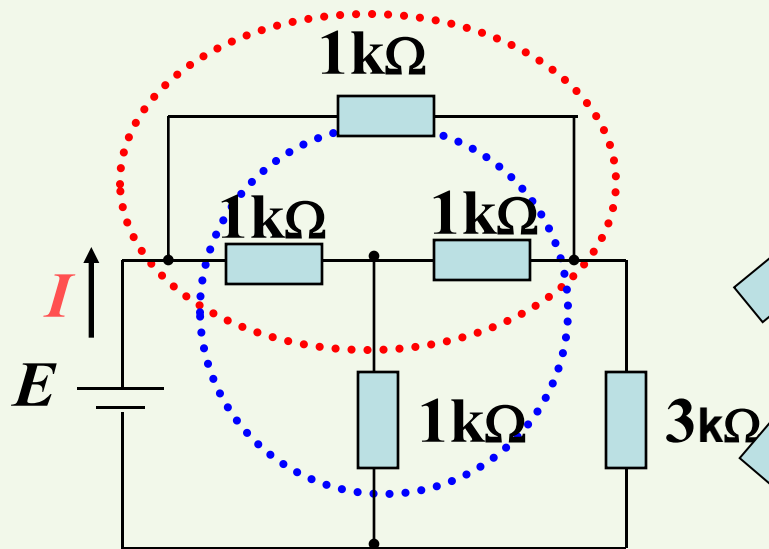
$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

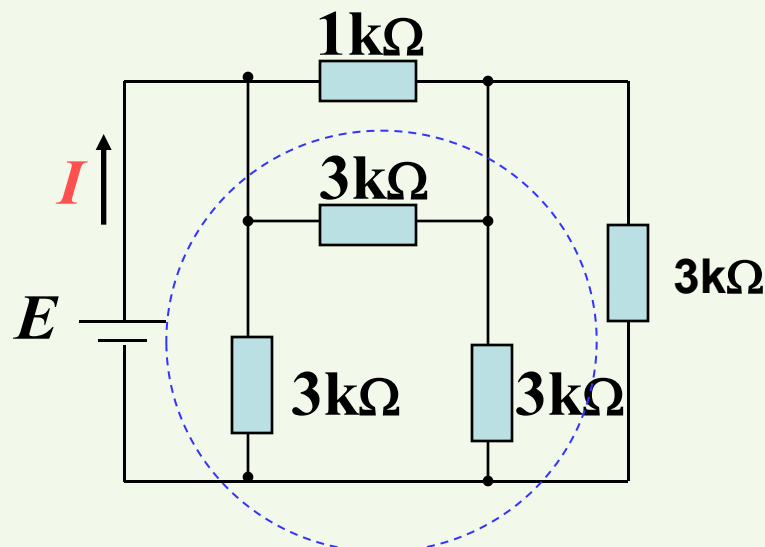
$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

若  $R_{12}=R_{23}=R_{31}=R$  时, 有  $R_1=R_2=R_3=R/3$

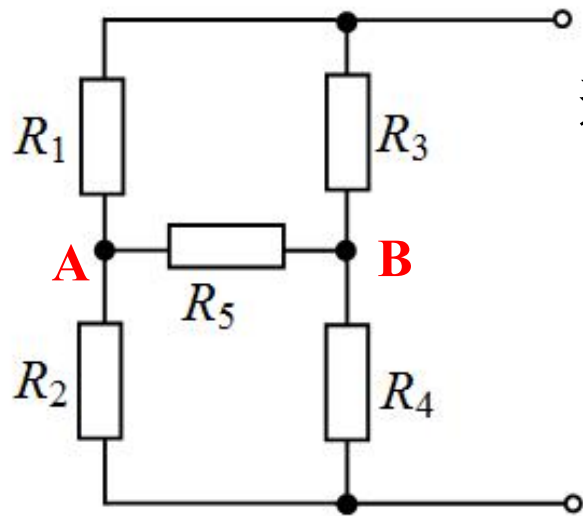
如何求  $I$  ?



$$R = 1/3 + (1/3 + 1) // (1/3 + 3) \text{ k}\Omega$$



$$R = 3 // (1 // 3 + 3 // 3) \text{ k}\Omega$$

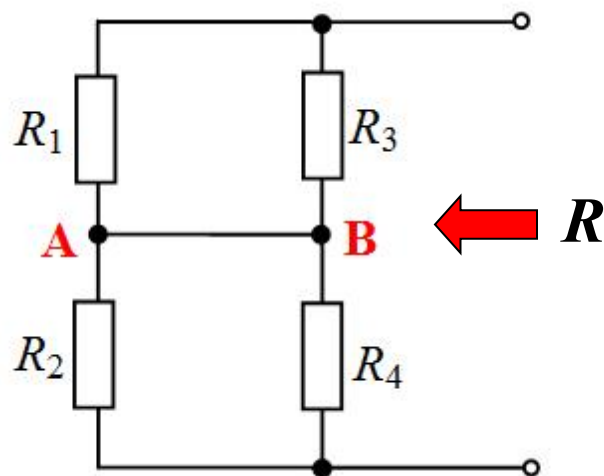


若  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$  (电桥平衡), 则无论  $R_5$  为多大

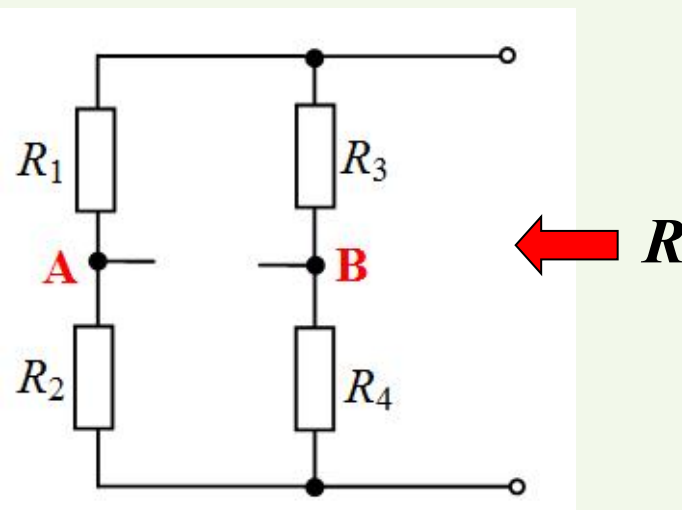
$U_{AB}=0$   $\rightarrow$  将AB两点短路

$I_{AB}=0$   $\rightarrow$  将AB两点断开

此时称A、B两点为 **自然等位点**。



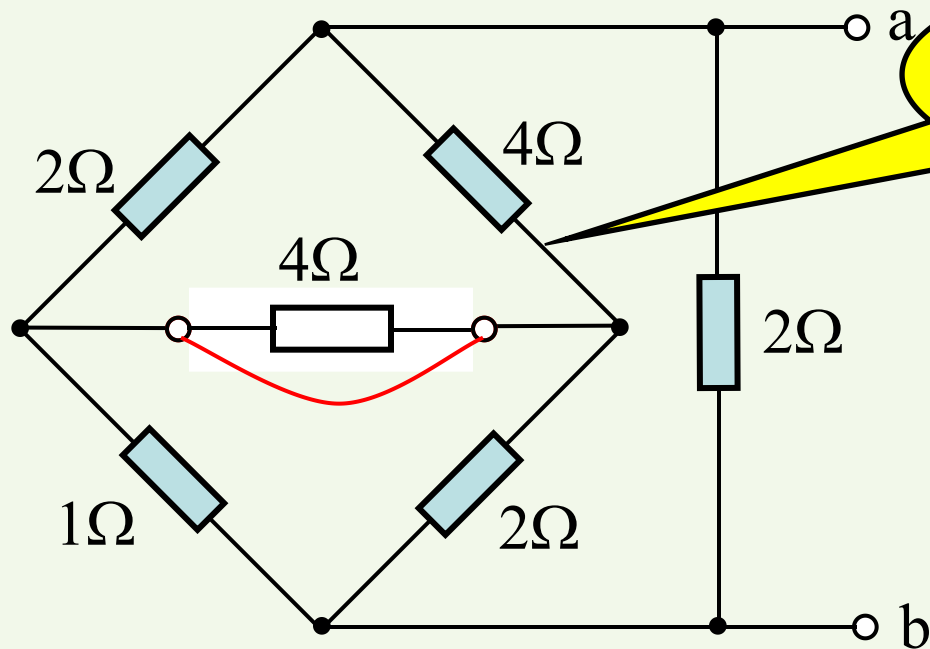
$$R = R_1 // R_3 + R_2 // R_4$$



$$R = (R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)$$



例 求  $R_{ab}$  .



电桥平衡！

(a) 开路:  $R_{ab} = 2 // (4 + 2) // (2 + 1) = 1\Omega$

(b) 短路:  $R_{ab} = 2 // (4 // 2 + 2 // 1) = 1\Omega$



# 课程小结

## 1、等效变换分析法

- 二端网络与等效
  - 二端网络等效的条件
- 无源二端网络的等效
- 电阻的串并联等效
  - 电阻的串联，电阻的并联
- 电阻的Y- $\Delta$ 等效变换



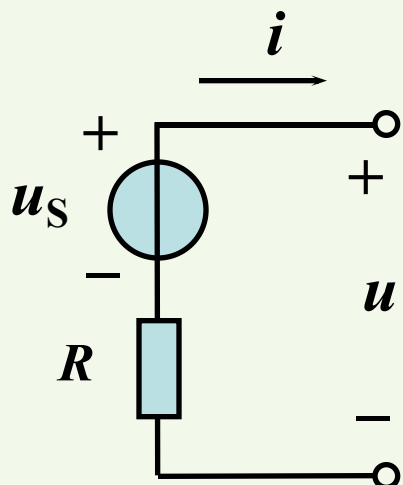
课堂练习  
第一节 4, 6, 7, 8,  
9, 13, 16, 17



## 2.1.3 电源的等效

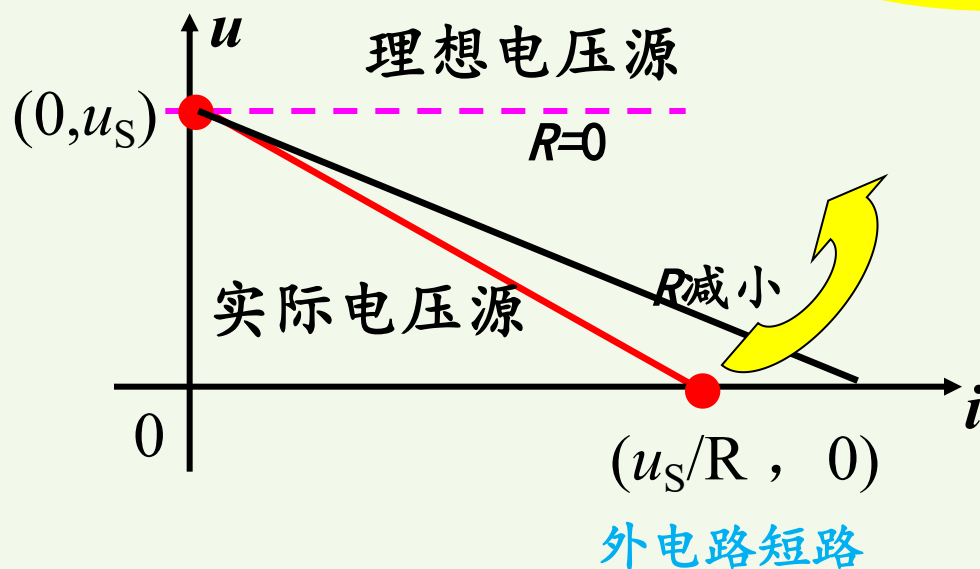
### 1. 实际电源的两种模型及其等效变换

实际电压源  $\equiv$  理想电压源  $u_S$  + 串联一个电阻  $R$



◆ 伏安特性  $u = u_S - Ri$

其外特性曲线如下:

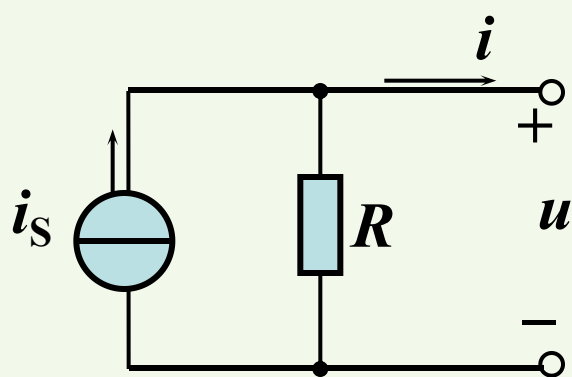


电源内阻,  
一般很小

# 实际电流源

电源内阻，  
一般很大

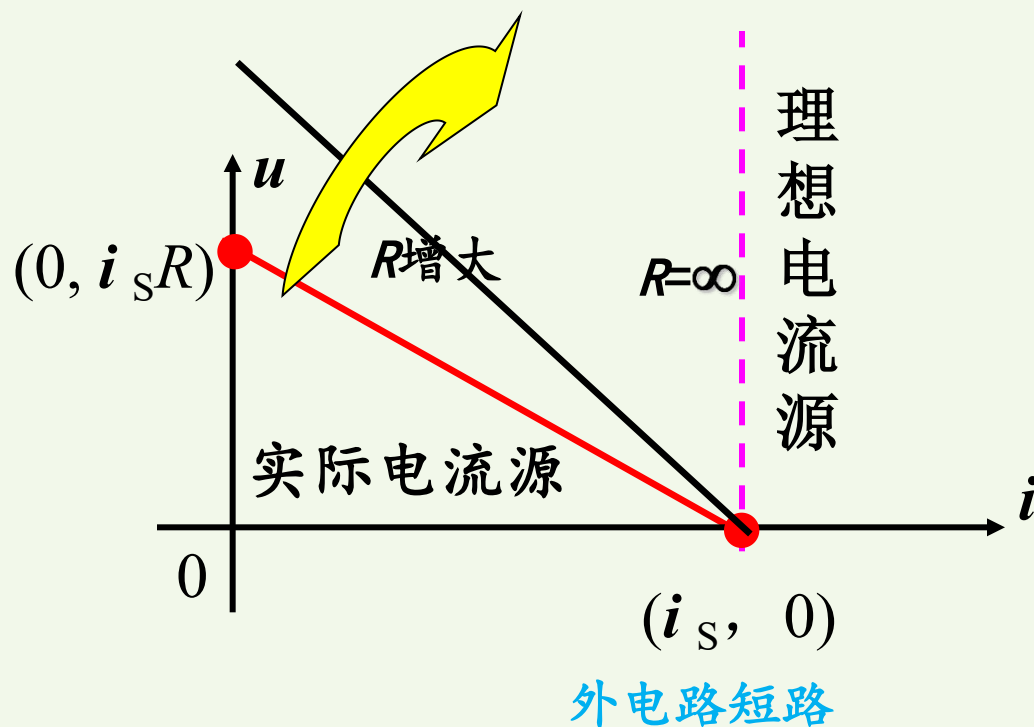
实际电流源  $\equiv$  理想电流源  $i_s$   $+$  并联一个电阻  $R$



伏安特性

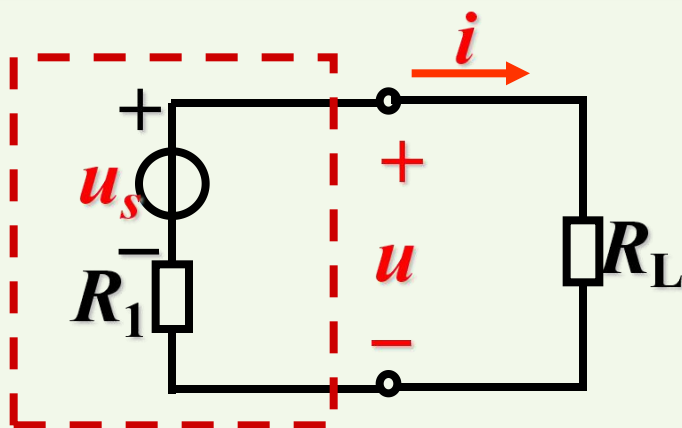
$$i = i_s - u/R$$

其外特性曲线如下：

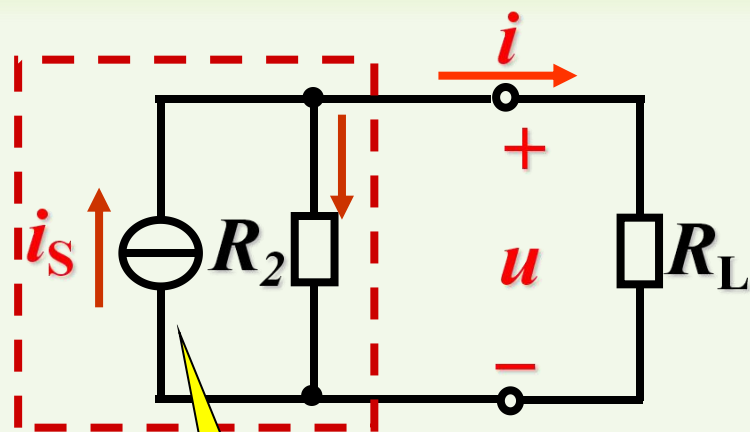




# 实际电压源与实际电流源的等效变换



电压源



电流源

由图a:  $u = u_s - iR_1$

$$i = u_s/R_1 - u/R_1$$

由图  $i = i_s - u/R_2$

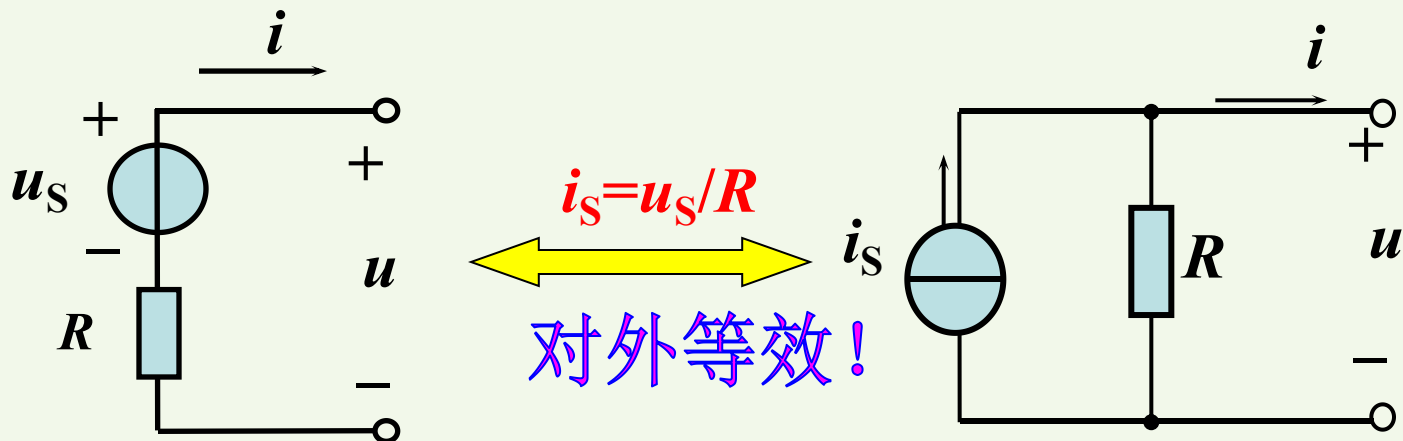
注意方向!

等效变换条件:

$$\begin{cases} R_1 = R_2 \\ i_s = \frac{u_s}{R_1} \end{cases}$$

## 注意事项:

- ① 电压源和电流源的等效关系只对外电路而言，  
对电源内部则是不等效的。



例：当  $R_L = \infty$  时

$$u = u_S, \quad i = 0$$

$$u = i_S R = u_S, \quad i = 0$$

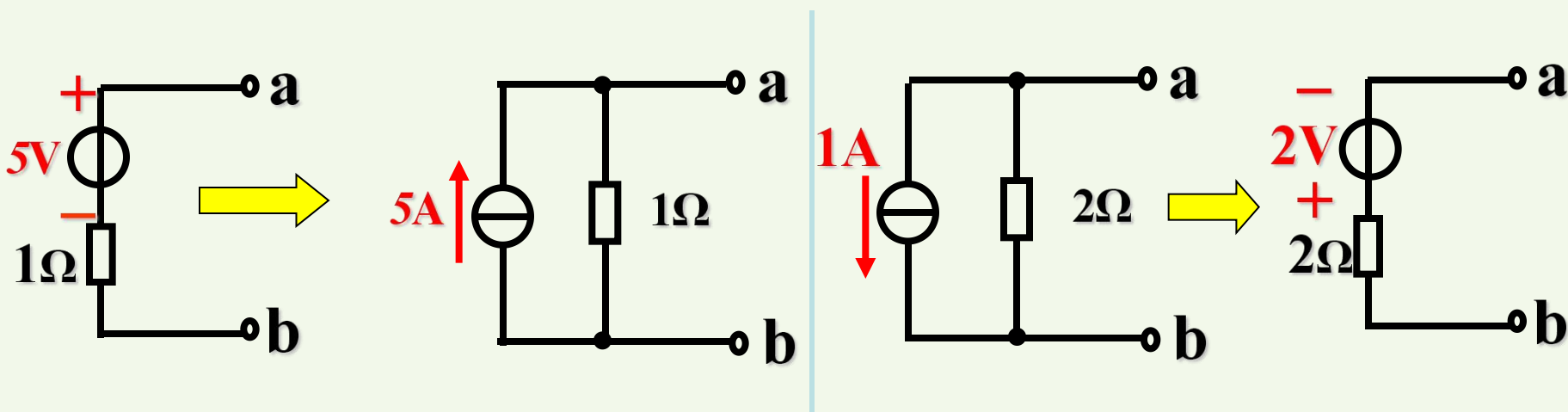
对内：电压源的内阻  $R$  中电流为 0，不损耗功率，  
而电流源的内阻  $R$  中电流为  $i_S$ ，要损耗功率。

对内不等效！

②理想电压源与理想电流源可以相互等效么? *No!!!*

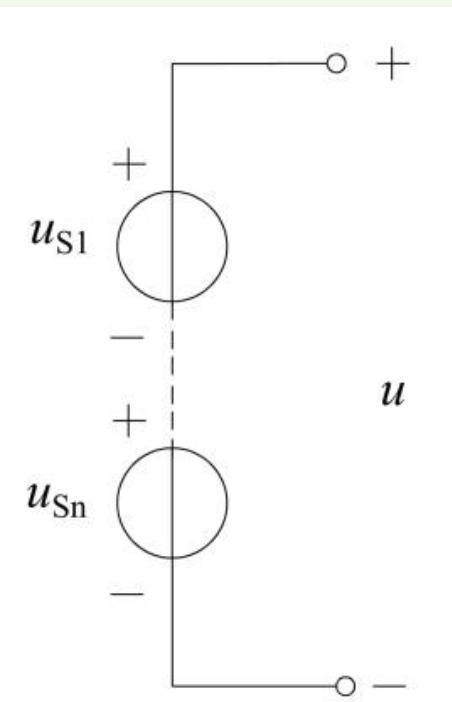
为什么? *端口伏安关系不相同!*

③ 电压源和某个电阻串联的电路, 都可等效为一个电流源和这个电阻并联的电路。



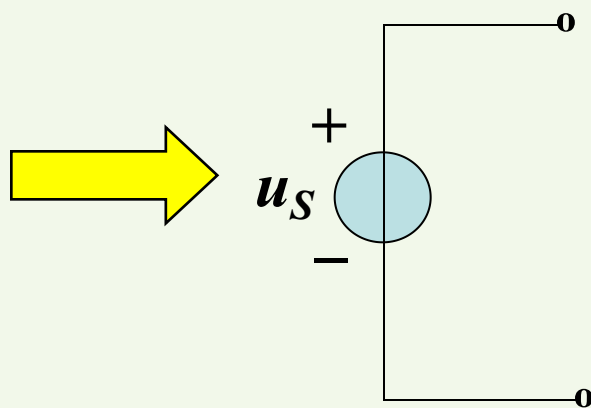
## 2. 理想电源的串并联等效

### ◆ 理想电压源的串联



由KVL可知：

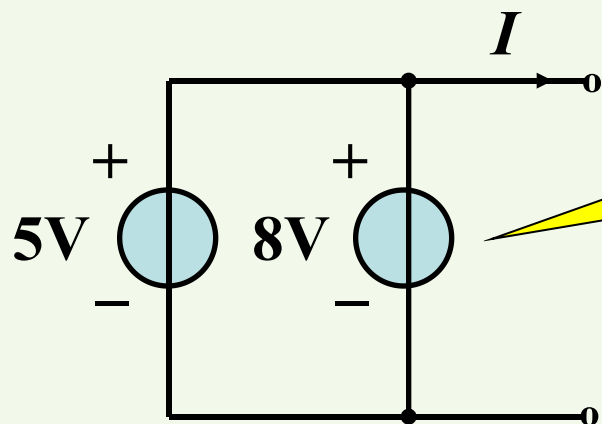
$$u = u_{S1} + u_{S2} + \dots + u_{Sn} = \sum_{k=1}^n u_{Sk}$$



$$u_S = \sum u_{Sk}$$

(注意参考方向!)

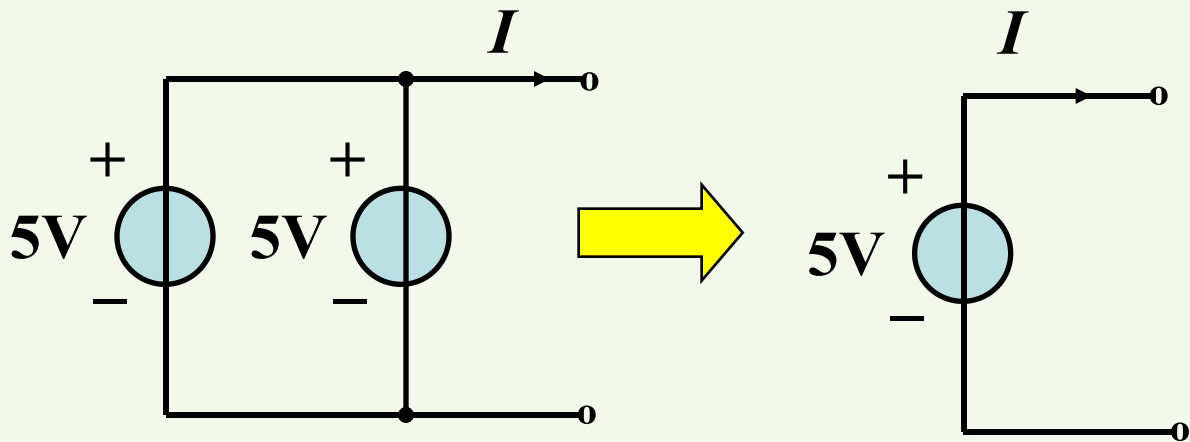
## ◆ 理想电压源的并联



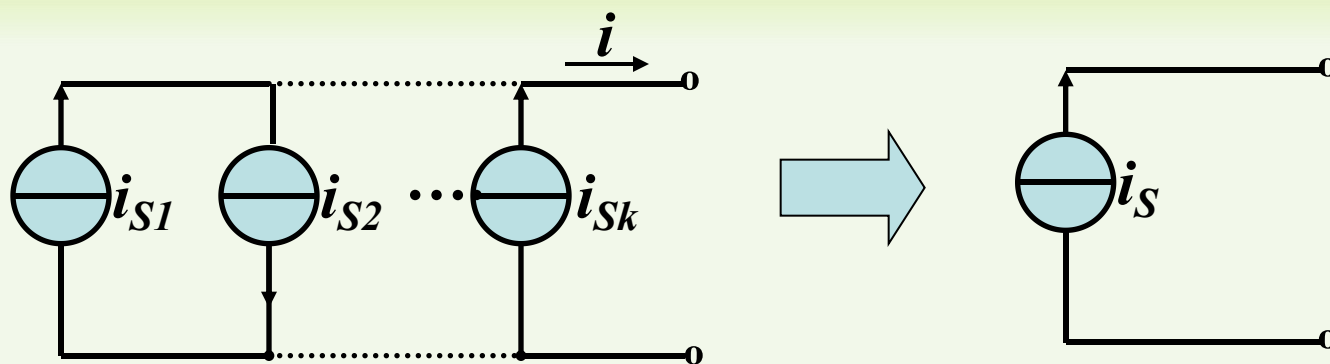
不允许  
并联！！

**违反KVL！**

只有**电压值相同**的电压源才能并联。



## ◆ 理想电流源的并联



$$i = i_{s1} - i_{s2} + \cdots + i_{sn} = \sum i_{sk}$$

可等效成一个理想电流源  $i_S$  (注意参考方向)

$$i_s = i_{s1} - i_{s2} + \cdots + i_{sn} = \sum i_{sk}$$

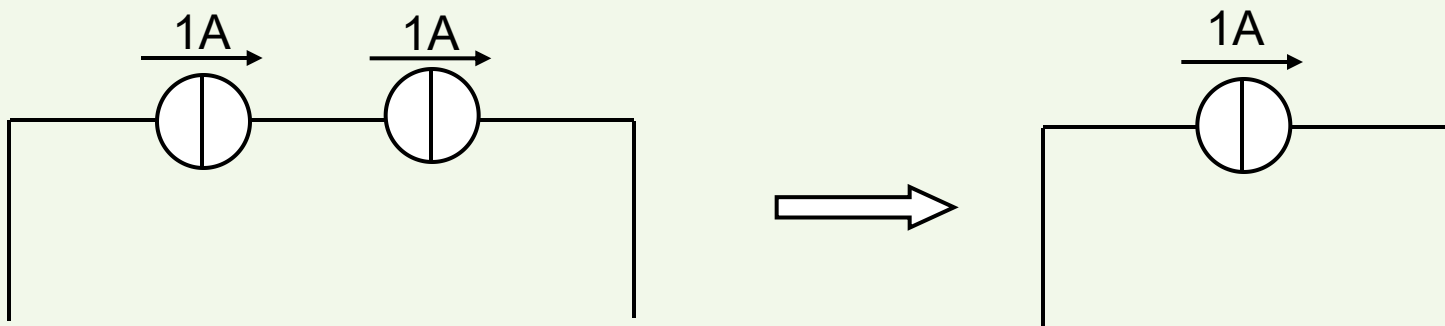


## ◆ 理想电流源的串联

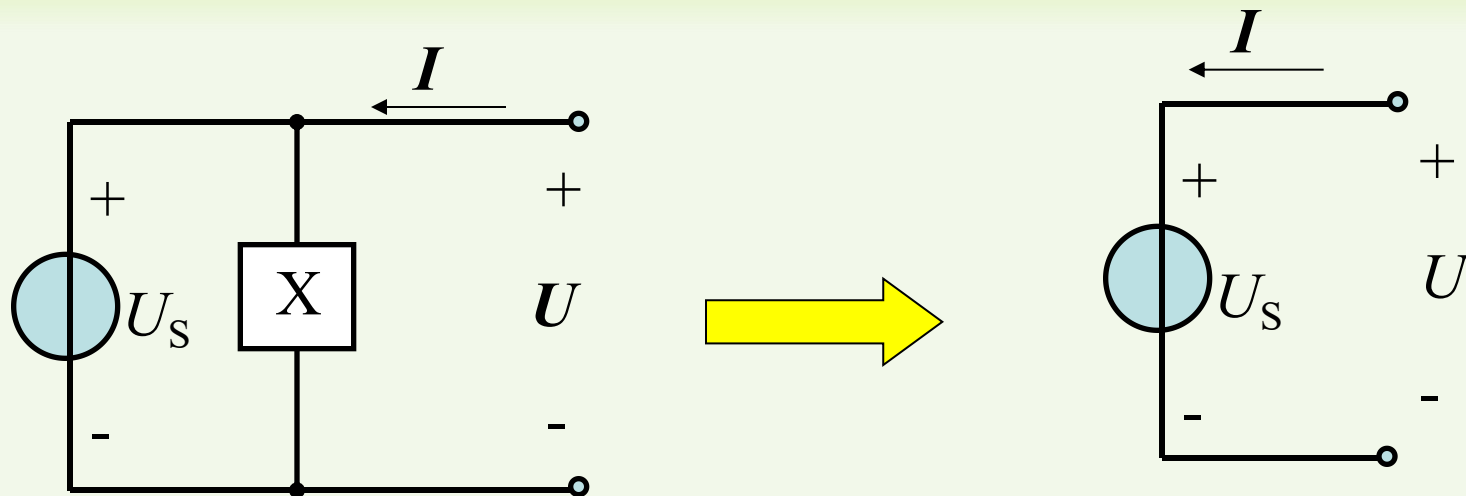
电流值不相同的理想电流源不允许串联！

*违反KCL!*

只有电流值相同的理想电流源才能串联。



◆理想电压源与其他电路的并联，对外都等效于该电压源。



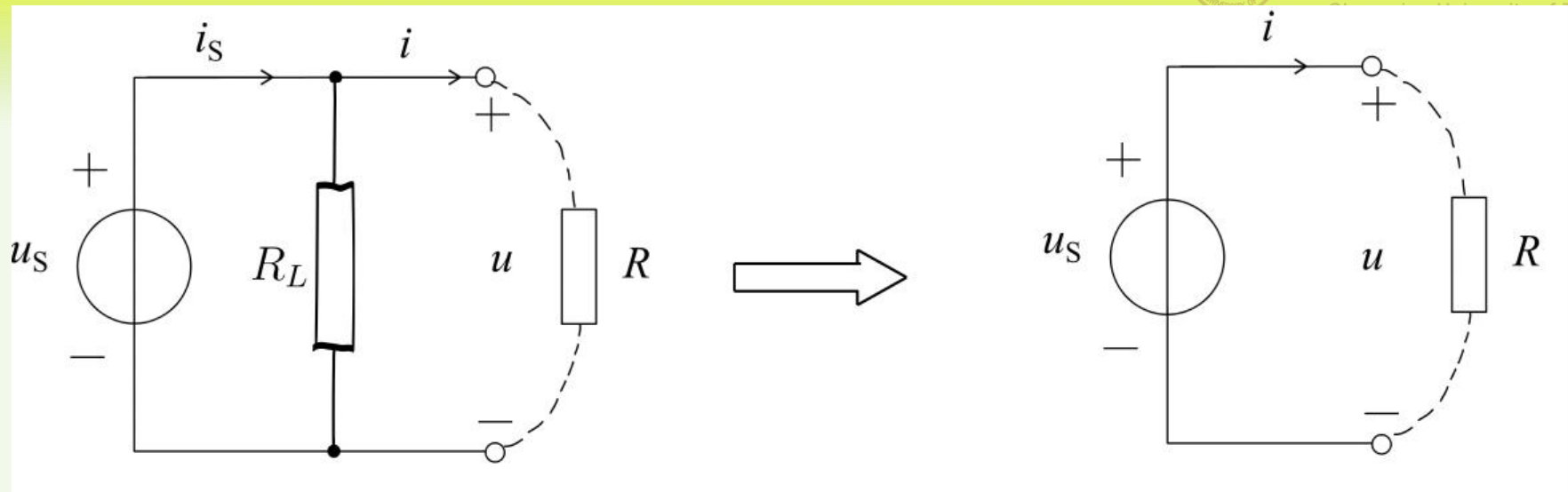
左图:  $U=U_S$ , 与 $I$ 无关

右图:  $U=U_S$ , 与 $I$ 无关

两个电路的端口伏安关系相同，所以对外等效！

对内等效么？





对外电路  $R$

左图:  $u=u_s$ ,  $i=u_s/R$

右图:  $u=u_s$ ,  $i=u_s/R$

对外等效!

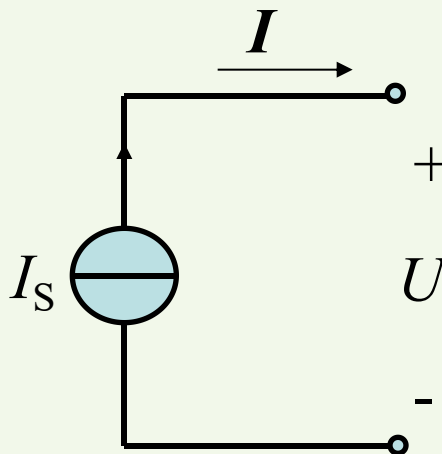
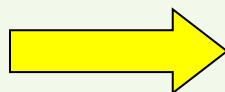
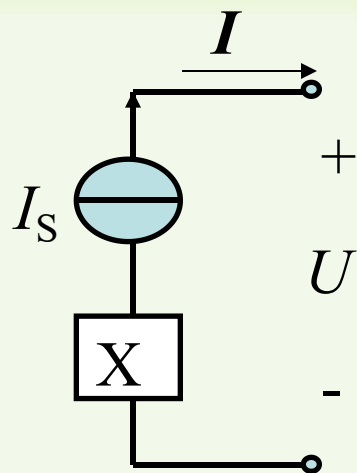
对内部电路:

左图: 电压源电流  $i_s=u_s/R+u_s/R_L$

右图: 电压源电流  $i_s=i=u_s/R$

对内不等效!

◆理想电流源与其他电路的串联，对外都等效于该电流源。



左图:  $I=I_s$ , 与  $U$  无关

右图:  $I=I_s$ , 与  $U$  无关

两个电路的端口伏安关系相同，所以对外等效！

对内不等效！

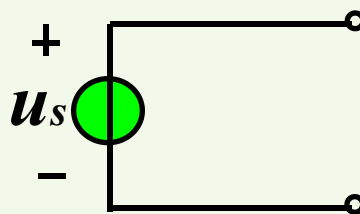
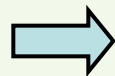
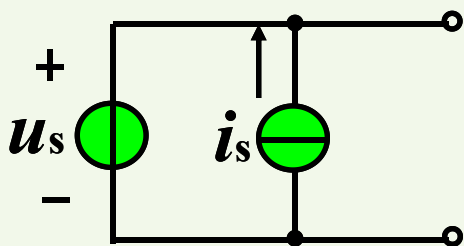


## 2.1.4 电路的等效分析

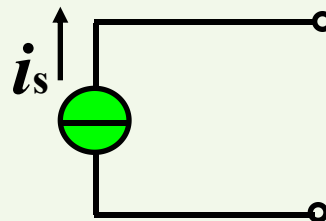
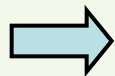
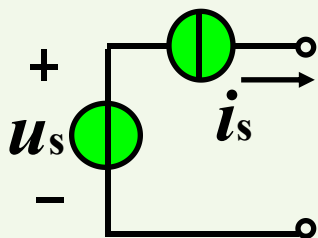
利用电路的**等效规律**对电路某一部分进行适当的等效变换，从而简化电路，方便计算。

**例** 求图示电路的最简等效电路。

理想电压源与其他电路的并联，对外都等效于该电压源。



*WHY?*

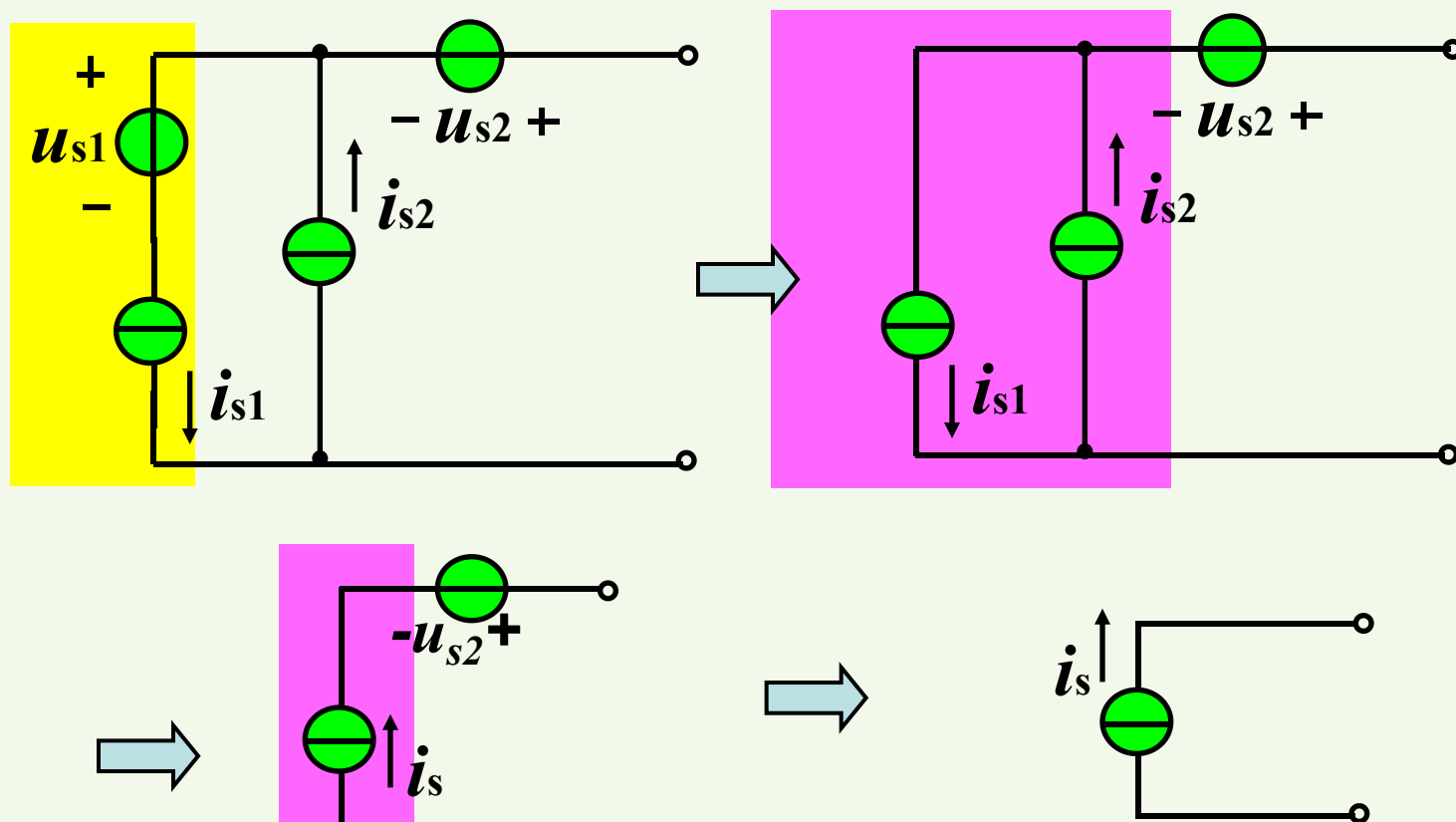


*WHY?*

理想电流源与其他电路的串联，对外都等效于该电流源。



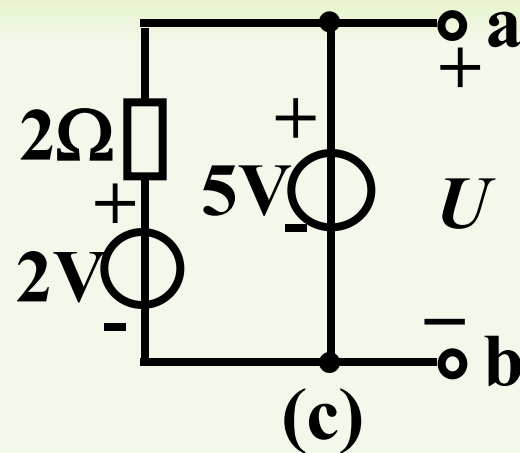
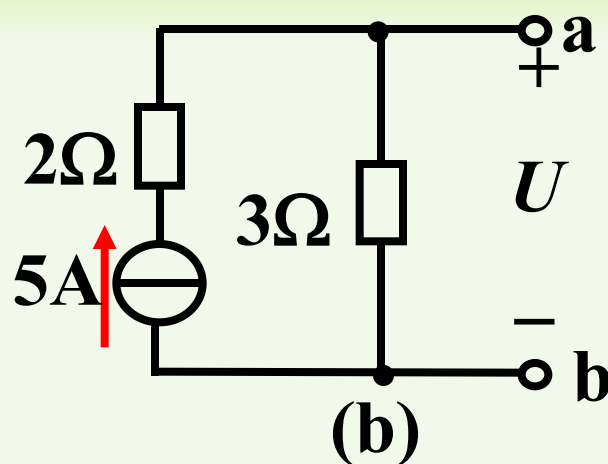
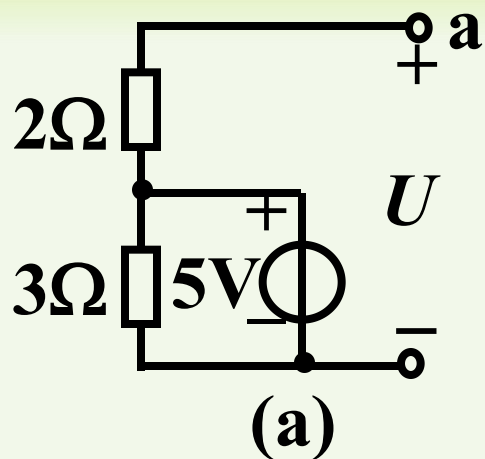
## 例 求图示电路的最简等效电路。



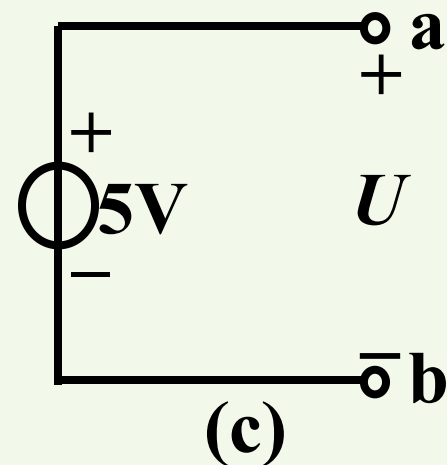
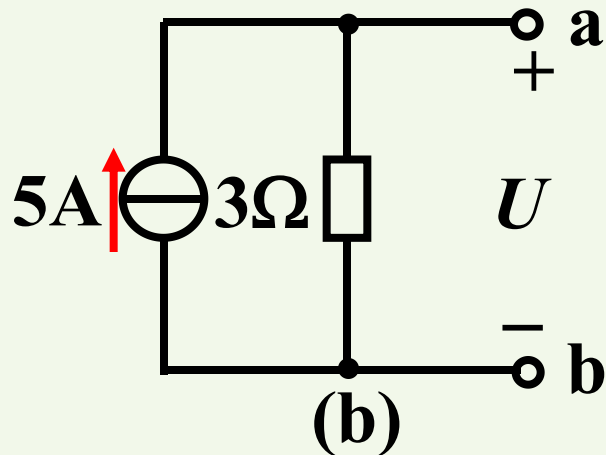
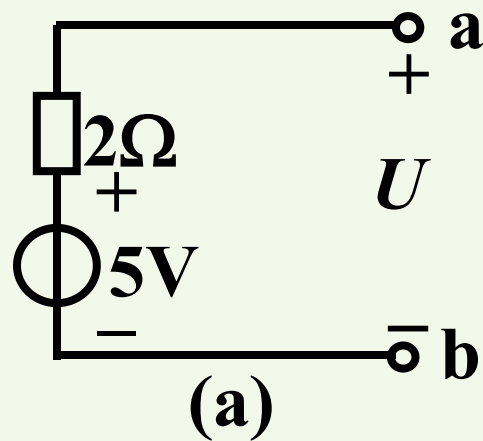
$$i_s = i_{s2} - i_{s1}$$

电压源**并联**电流源=电压源  
电压源**串联**电流源=电流源

**例** 求下列各电路的等效电源

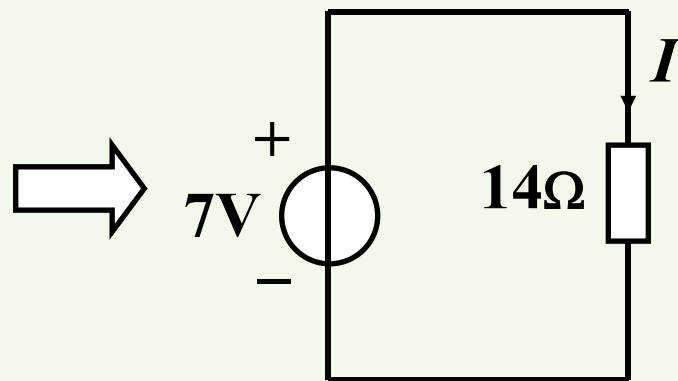
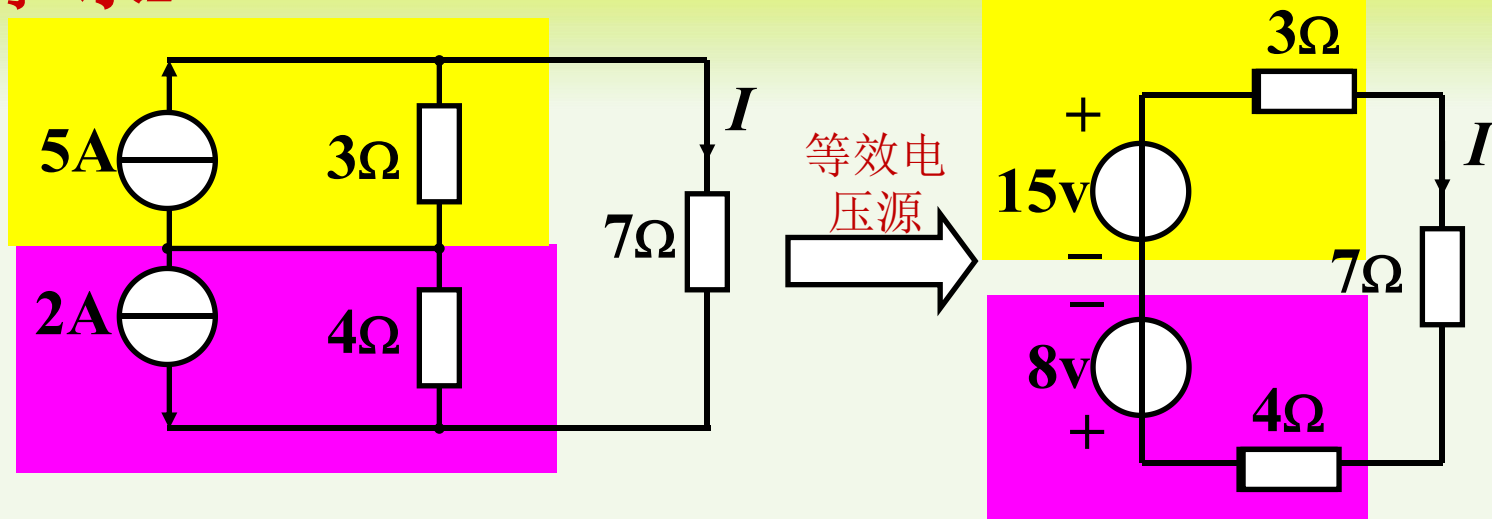


**解:**





## 例 求 $I$ 电流源与电压源的等效变换



等效变换条件:

$$\begin{cases} R_1 = R_2 \\ i_s = \frac{u_s}{R_1} \end{cases}$$

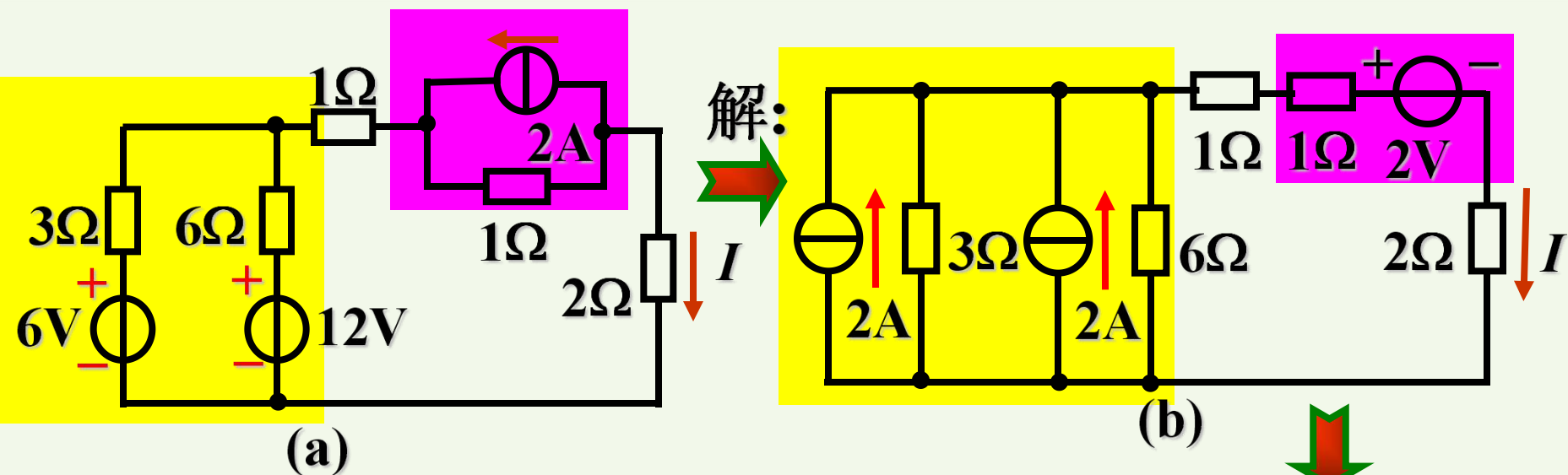
等效变换简化了电路的求解

$I = 0.5A$

等效变换方法:

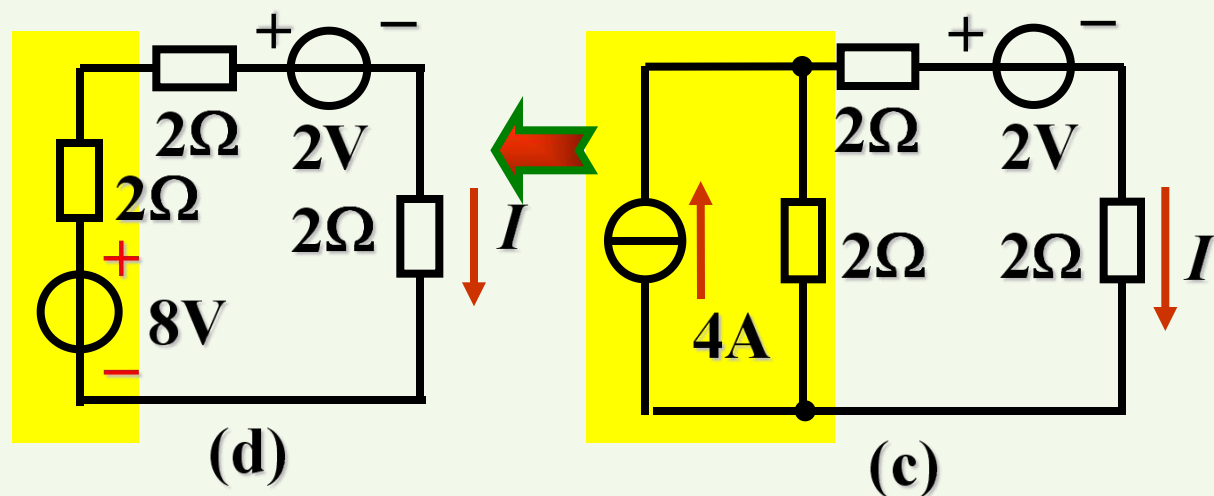
电流源并联电阻等效为电压源串联电阻，  
电压源串联电阻等效为电流源并联电阻。

**例** 试用等效变换的方法计算 $2\Omega$ 电阻中的电流。



由图(d)可得

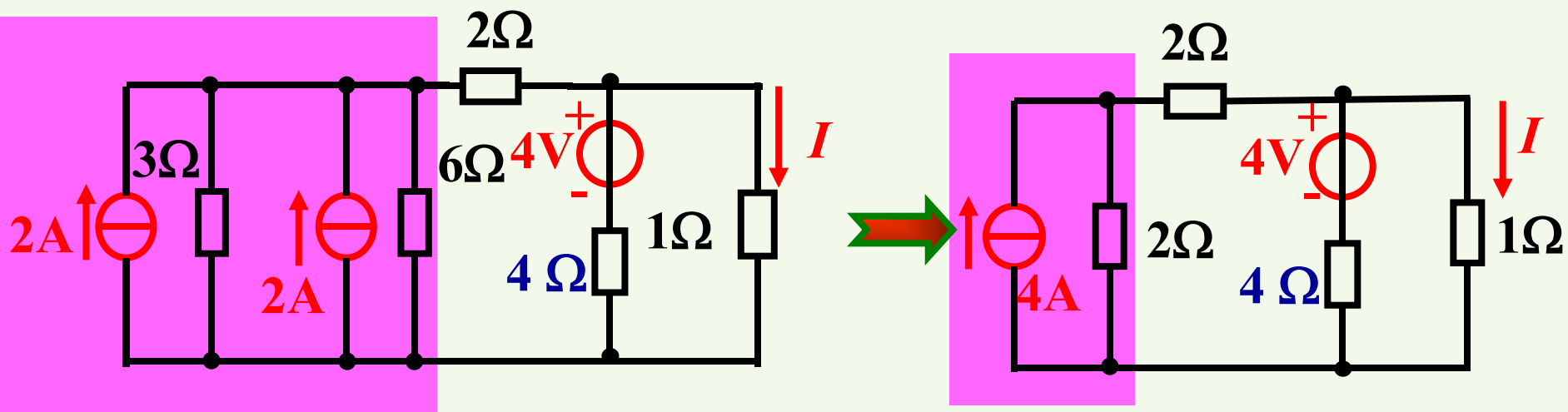
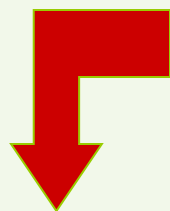
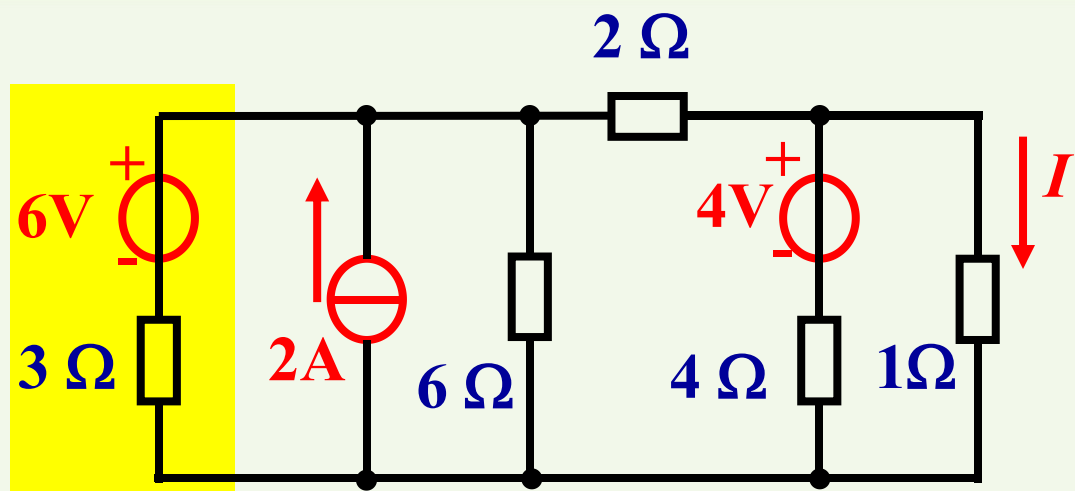
$$I = \frac{8 - 2}{2 + 2 + 2} \text{ A} = 1 \text{ A}$$



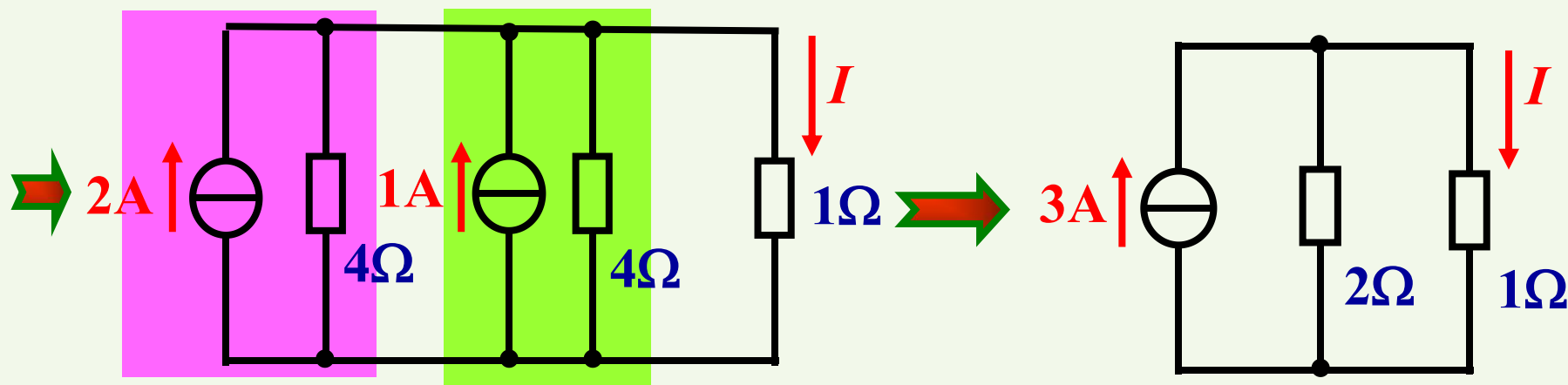
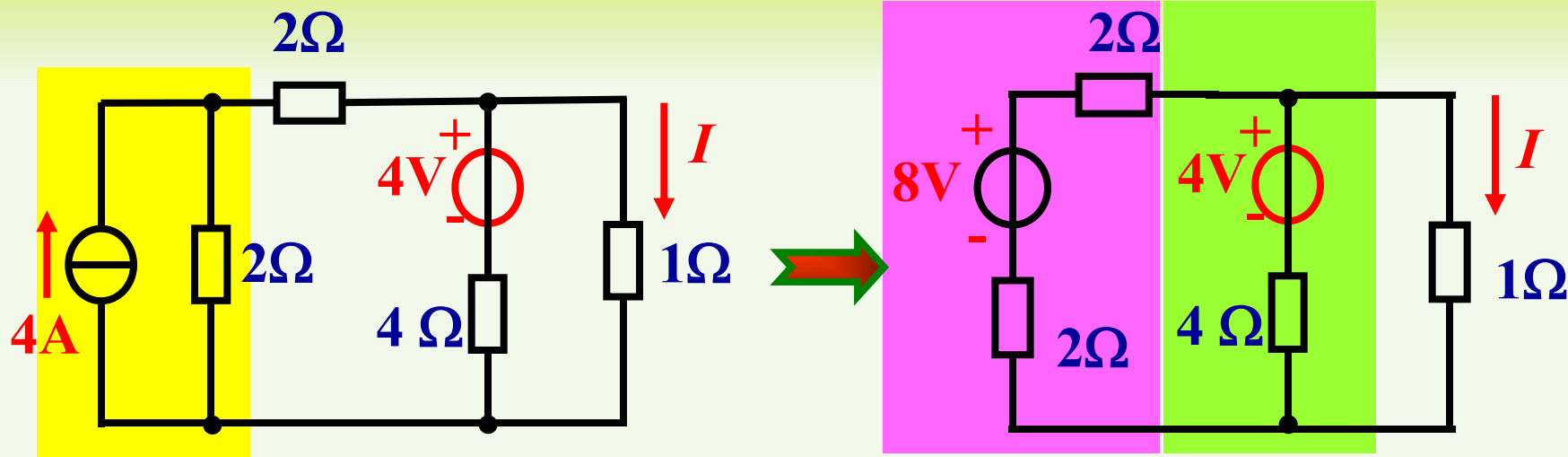


**例** 试用等效变换的方法计算 $1\ \Omega$ 电阻中的电流。

**解：** 统一电源形式







$$I = \frac{2}{2+1} \times 3A = 2A$$



课堂练习  
第二节 1, 2, 10,  
11, 12, 21





# 课程小结

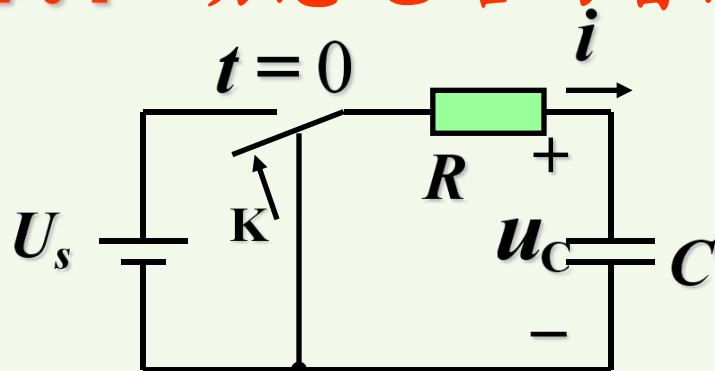
## 1、电源的等效

- 实际电源的两种模型及其等效变换
  - 二端网络等效的条件
- 理想电源的串并联等效
  - 理想电压源的串联
  - 理想电流源的串联

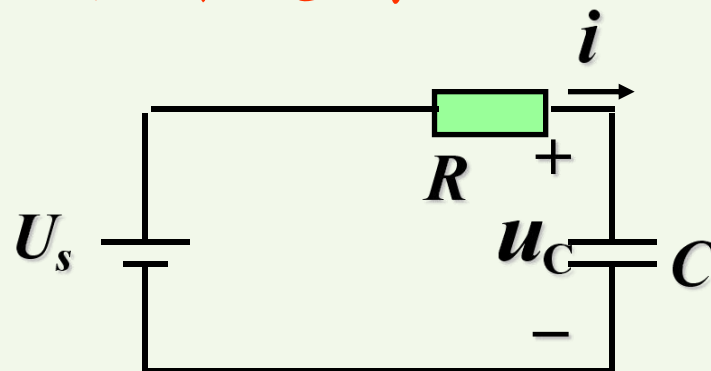
## 2、电路的等效分析

## 2.7 一阶动态电路的分析

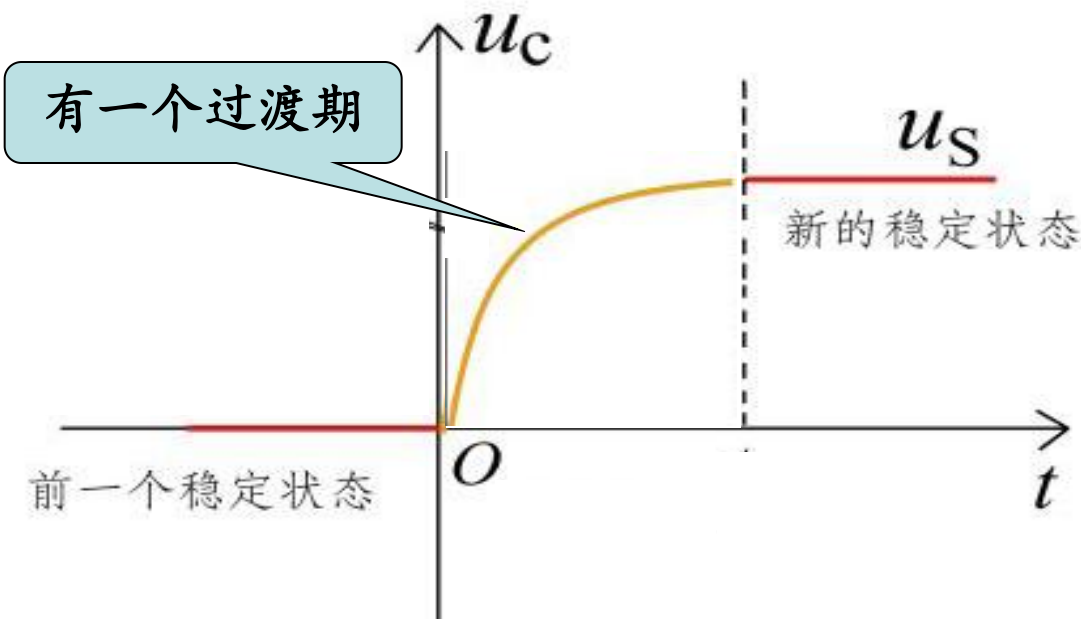
### 2.7.1 动态电路的暂态过程及换路定则



K未动作前  $u_C = 0$



K接通很长时间后  $u_C = U_s$



**暂态过程:**

电路由一个稳态过渡到另一个稳态需要经历的过程, 又称**过渡过程**。

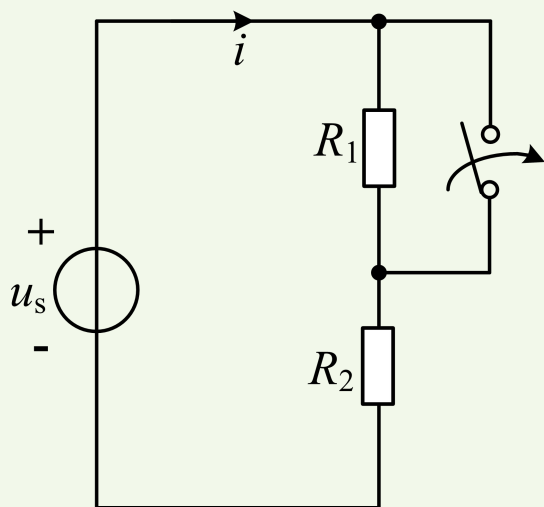


## ◆ 暂态过程产生的原因

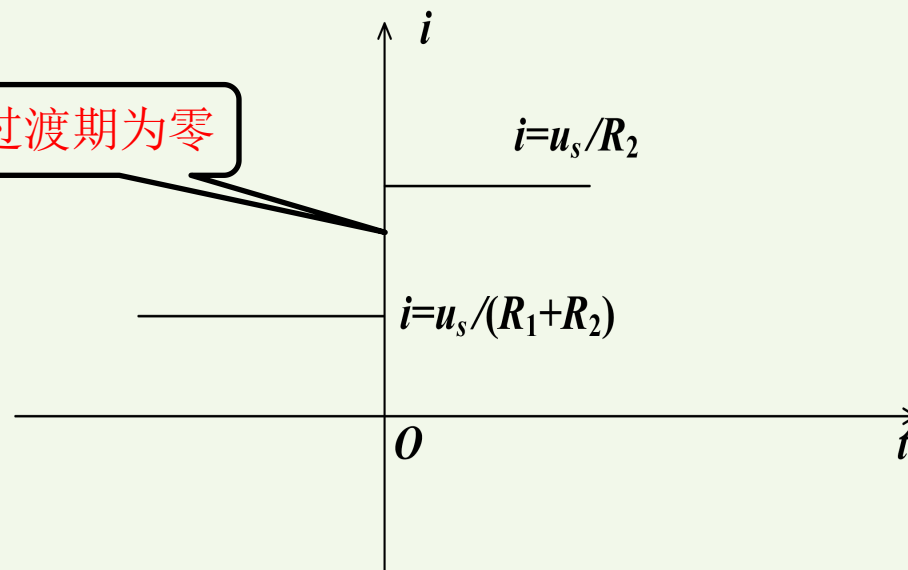
内因

(1) 电路内部含有储能元件L、C  
能量的储存和释放都需要一定的时间来完成

电阻电路有暂态吗？



过渡期为零



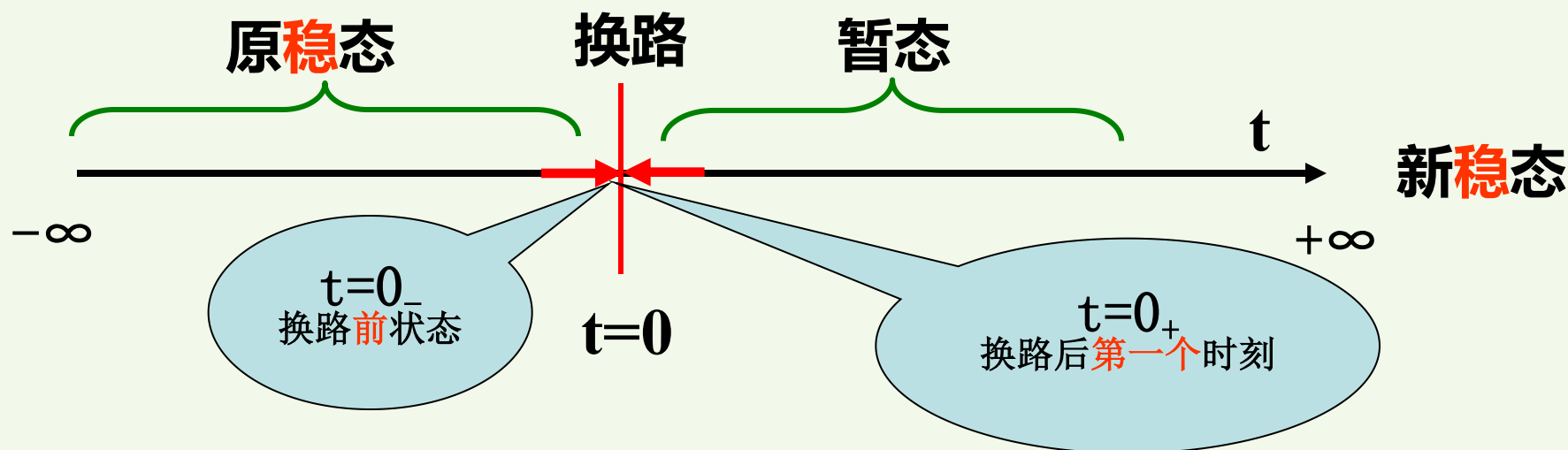
∴ 电阻电路无暂态过程。

(2) 电路结构或参数发生变化 —— 换路

外因



## ◆有关过渡过程的几个时间概念



## ◆不同时刻电压、电流的表示

原稳态:  $u(0_-)$ 、 $i(0_-)$

初始值:  $u(0_+)$ 、 $i(0_+)$

暂态:  $u(t)$ 、 $i(t)$

新稳态:  $u(\infty)$ 、 $i(\infty)$



## ➤ 换路定则

换路指的是**电路结构**或**参数**发生变化。

设  $t = 0$  时发生换路，则  $0_-$  表示**换路前**的瞬间， $0_+$  表示**换路后**的瞬间。

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi) d\xi$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L(\xi) d\xi$$

如果在  $0_- \sim 0_+$  内，电容电流  $i_C$  和电感电压  $u_L$  为**有限值**，则**积分项为0**，从而有

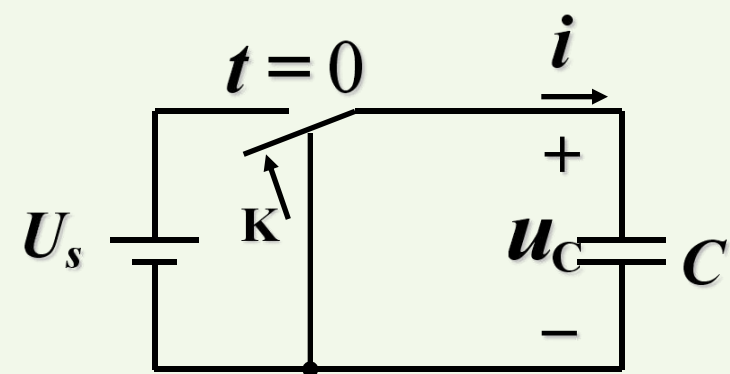
$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$$

换路定则

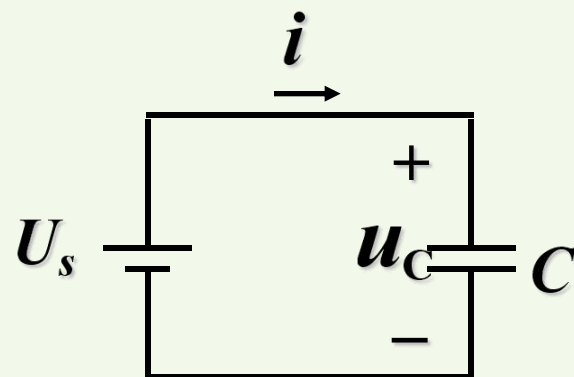
换路前后**电容的电压**和**电感的电流**不能突变

# 换路定则适用的条件:

换路瞬间**电容上的电流**与**电感上的电压**是**有限值**!



开关动作前  $u_C(0_-)=0$



开关动作后  $u_C(0_+)=U_s$

显然  $u_C(0_+) \neq u_C(0_-)$

$\because$  在本电路中, 换路瞬间电容将电源直接短路, 电路中将会有无穷大的电流冲激。因此, 换路定则在此不再适用。





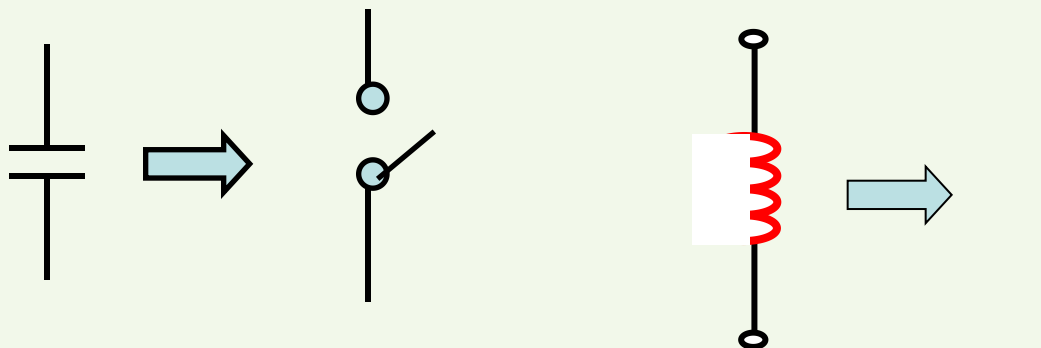
## ➤ 电路初始值的确定

**初始值：**  $t = 0_+$  时电路各元件上的电压、电流值。

### ➤ 求解步骤

(1) 在  $t=0_-$  时的等效电路中，求  $u_C(0_-)$  或  $i_L(0_-)$ 。

$t=0_-$  时 **电容** 可视为开路，**电感** 视为短路。



(2) 由换路定则确定  $u_C(0_+)$  或  $i_L(0_+)$ 。

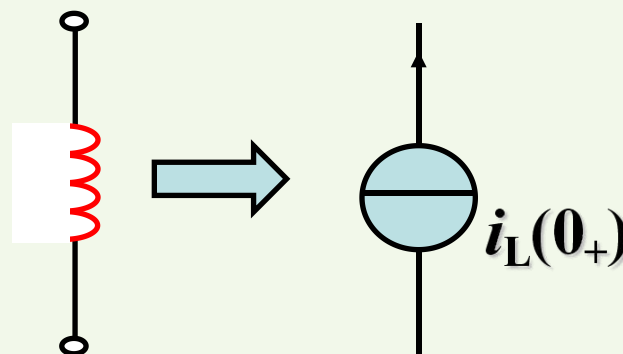
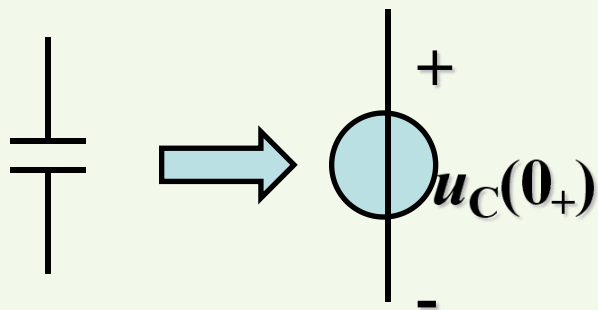
$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$$



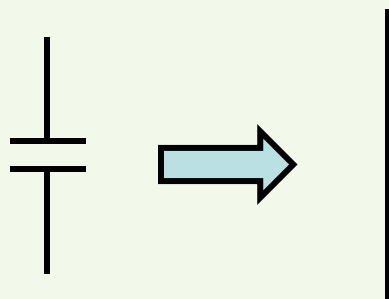
(3) 画出 $t=0_+$ 时的等效电路，再求其他初始值。

$t=0_+$ 时电容用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源代替；

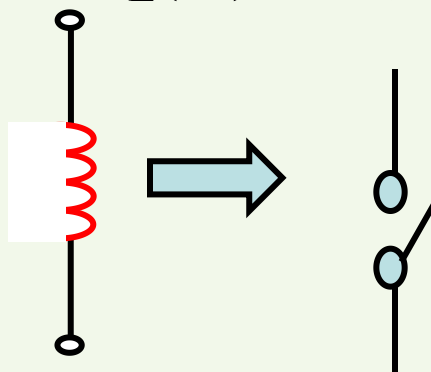
电感用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源代替。



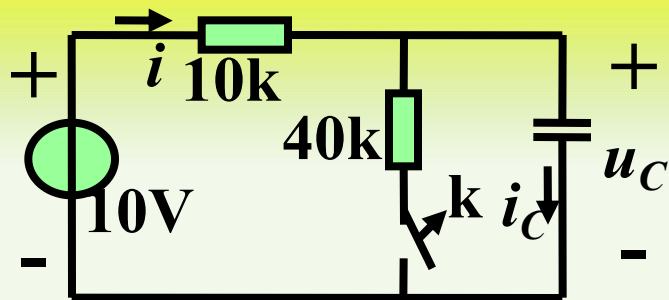
若 $u_C(0_+)=0$ ，则



若 $i_L(0_+)=0$ ，则



例



原来开关闭合，电路已稳定，  
 $t=0$ 时开关断开，求  $i_C(0_+)$ 。

解：(1) 由 $0_-$ 电路求  $u_C(0_-)$ 。

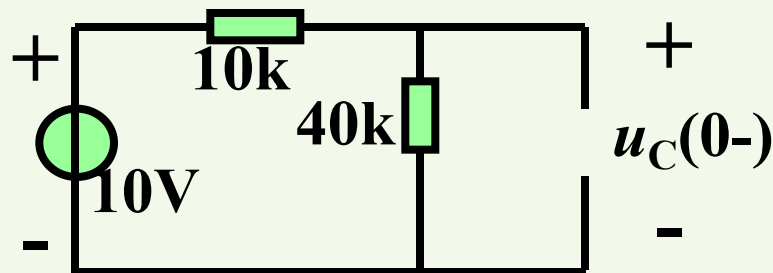
$$u_C(0_-)=8V$$

(2) 由换路定律

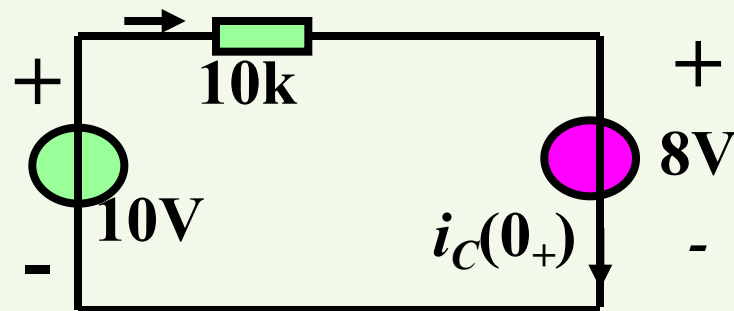
$$u_C(0_+) = u_C(0_-)=8V$$

(3) 由 $0_+$ 等效电路求  $i_C(0_+)$ 。

$$i_C(0_+) = \frac{10-8}{10} = 0.2\text{mA}$$

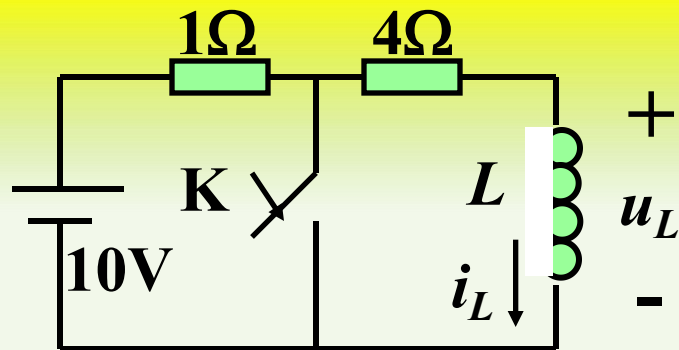


$t=0_-$ 等效电路



$t=0_+$ 等效电路

例



$t = 0$ 时闭合开关k, 求  $u_L(0_+)$

解: (1) 由 $0_-$ 电路求 $i_L(0_-)$ 。

$$i_L(0_-) = 2\text{A}$$

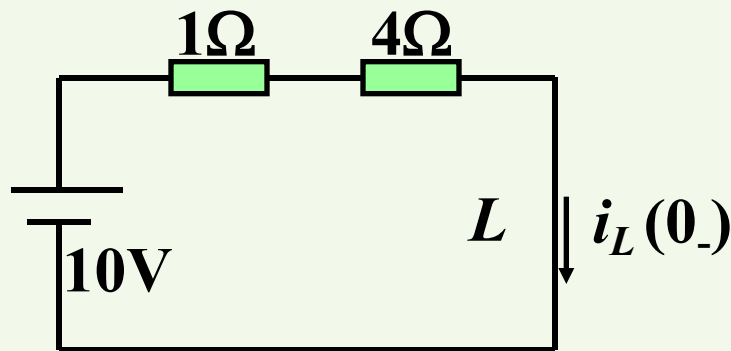
(2) 由换路定律

$$\dot{i}_L(0_+) = \dot{i}_L(0_-) = 2\text{A}$$

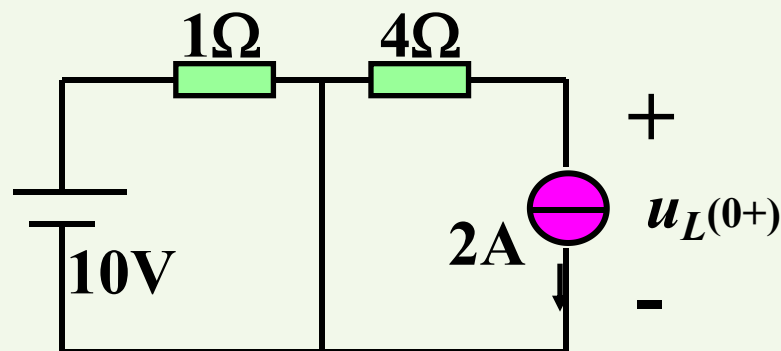
(3) 由 $0_+$ 等效电路求  $u_L(0_+)$ 。

根据右回路列KVL得:

$$u_L(0_+) = -2 \times 4 = -8\text{V}$$



$t=0_-$ 等效电路



$t=0_+$ 等效电路



## 2.7.2 一阶电路的零输入响应

**一阶电路：**由一阶微分方程描述的电路。

**结构特点：**通常只包括一个动态元件（电容或电感），  
或者经过等效变换后可等效为一个动态元件。

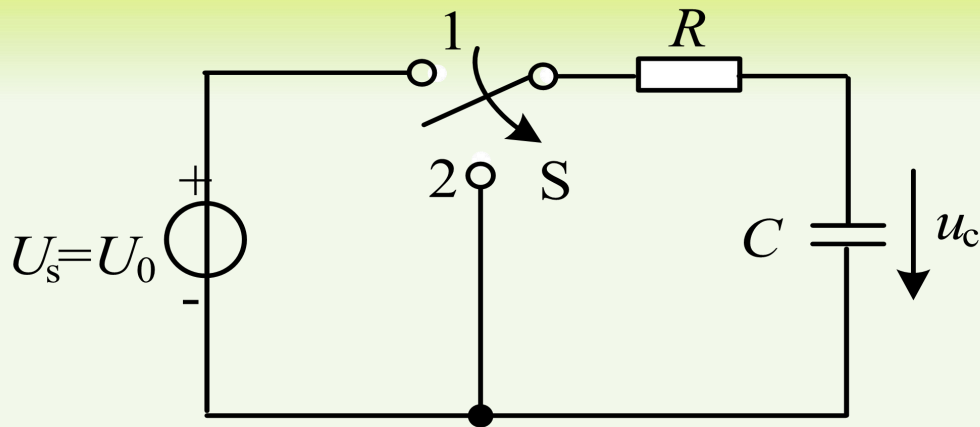
**零输入响应：**

外加激励(独立电源)为零，仅由动态元件的初始储能所产生的响应。

所以零输入响应即为动态元件的放电过程。

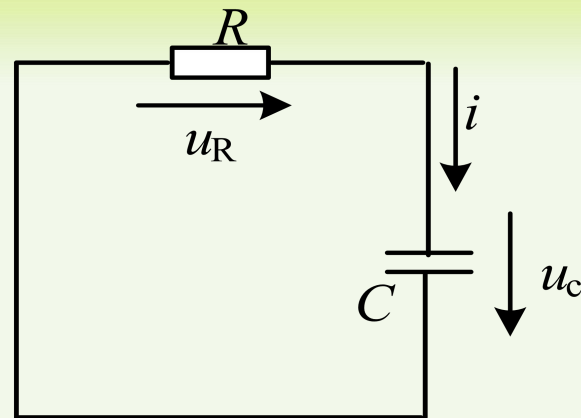


# 1. 一阶RC电路的零输入响应



$t=0$ 时, 开关S从1拨向2

$$u_C(0_-) = U_s = U_0$$



换路后的电路

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

$t \geq 0$ 时, 由KVL得:  $u_C + u_R = 0$

$$\text{得: } RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

将  $i = C \frac{du_C}{dt}$ ,  $u_R = Ri$  代入  
一阶齐次微分方程

初始条件  $u_C(0_+) = U_0$

特征方程  $RCp + 1 = 0$

特征根  $p = -\frac{1}{RC}$

$$\text{则 } u_C = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

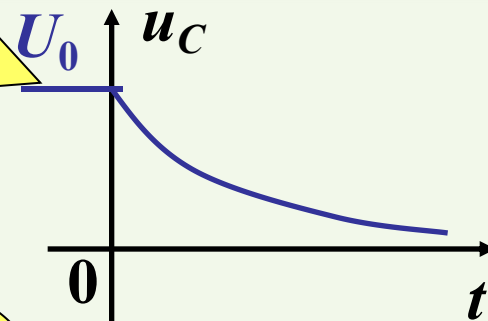


$$u_c = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_c(0_+) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} \Big|_{t=0}$$

电容电压由初始值 $U_0$ 按指数规律衰减到稳态值0。

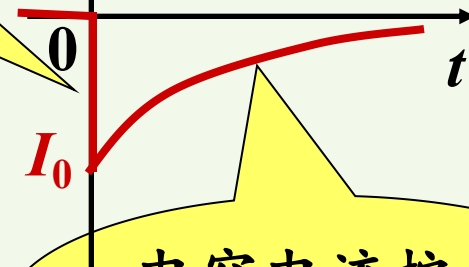
$u_c(0_+) = U_0$



$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

电容电流发生跃变

$$i = C \frac{du_c}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$



电容电流按指数规律衰减

令  $\tau = RC$ ，称  $\tau$  为一阶电路的时间常数

$$[\tau] = [RC] = [\text{欧}][\text{法}] = [\text{欧}] \left[ \frac{\text{库}}{\text{伏}} \right] = [\text{欧}] \left[ \frac{\text{安秒}}{\text{伏}} \right] = [\text{秒}]$$

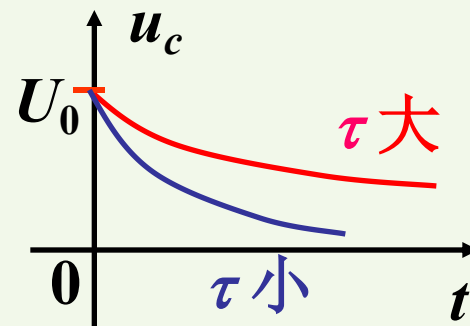


$$\tau = R C \quad u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

时间常数  $\tau$  的大小反映了电路过渡过程时间的长短

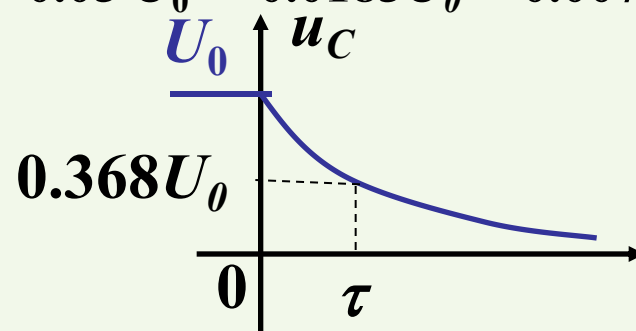
$\tau$  大 过渡过程的时间长

$\tau$  小 过渡过程的时间短



$t$	0	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$
$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	$U_0$	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-4}$	$U_0 e^{-5}$
	$U_0$	$0.368 U_0$	$0.135 U_0$	$0.05 U_0$	$0.0183 U_0$	$0.007 U_0$

$\tau$ : 电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间。

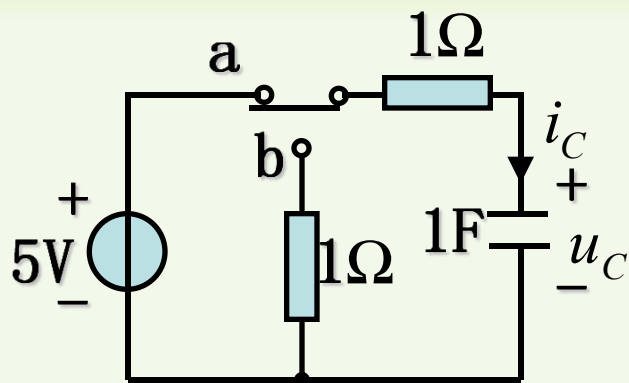


工程上近似认为, 经过  $4\tau$  过渡过程结束。





**例**  $t=0$ 时, 开关从a投向b, 求电容暂态电压和电流。



解: 该电路为零输入响应

$$u_C(t) = u_C(0+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

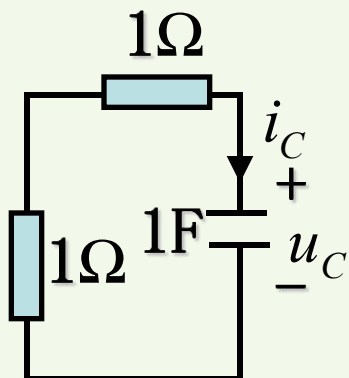
由电路得:

$$u_C(0+) = u_C(0-) = 5V$$

$$R = 1 + 1 = 2\Omega$$

$$\tau = RC = 2s$$

$t \geq 0$ 时电路



$$\Rightarrow u_C(t) = 5e^{-\frac{t}{2}}V \quad t \geq 0$$

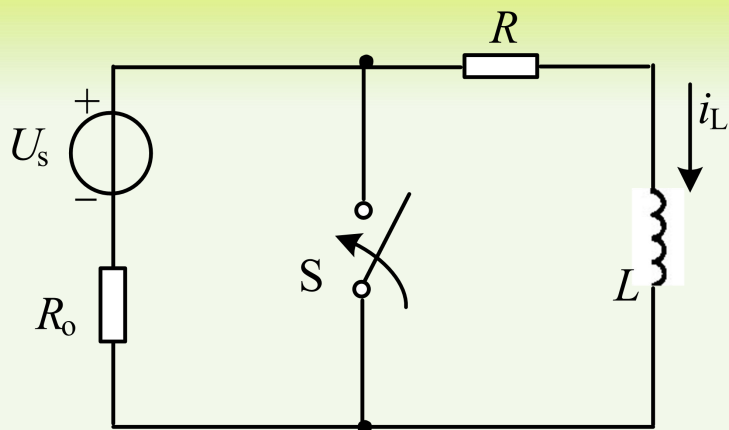
$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = -2.5e^{-\frac{t}{2}}A \quad t \geq 0$$

或由欧姆定律求得:

$$i_C(t) = -\frac{u_C(t)}{R} = -2.5e^{-\frac{t}{2}}A \quad t \geq 0$$



## 2. 一阶 $RL$ 电路的零输入响应



$t=0$ 时, 开关 $S$ 闭合

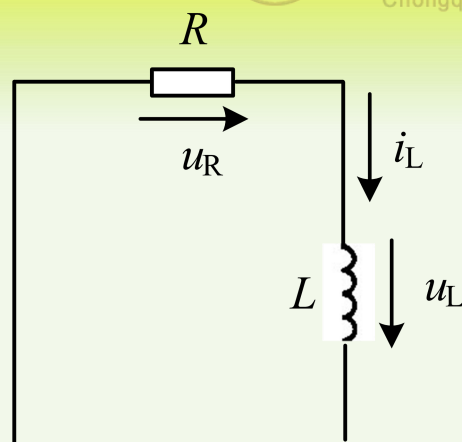
$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_0 + R} = I_0$$

$t \geq 0$ 时, 由KVL得:  $u_L + u_R = 0$

将  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ ,  $u_R = Ri_L$  代入上式

$$\text{得: } L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \quad \text{初始条件 } i_L(0_+) = I_0$$

$$\therefore i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad \tau = L/R \quad \text{一阶} RL \text{电路的时间常数}$$



换路后的电路

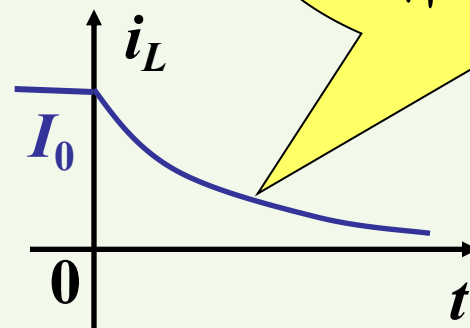
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$$



$\tau = L/R$  一阶  $RL$  电路的时间常数

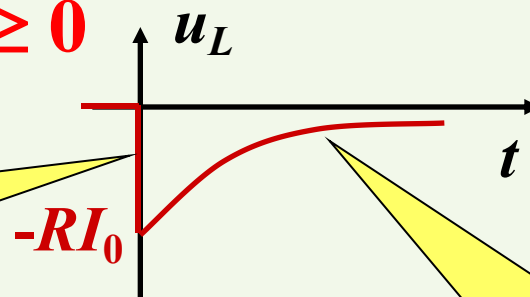
$$[\tau] = \left[ \frac{L}{R} \right] = \left[ \frac{\text{亨}}{\text{欧}} \right] = \left[ \frac{\text{韦}}{\text{安} \cdot \text{欧}} \right] = \left[ \frac{\text{伏} \cdot \text{秒}}{\text{安} \cdot \text{欧}} \right] = [\text{秒}]$$

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$



电感电流由初始值  $I_0$  按指数规律衰减到稳态值 0

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$



电感电压发生跃变

电感电压按指数规律衰减



## 计算一阶电路零输入响应的步骤:

(1) 由  $t = 0 -$  的电路确定电容电压  $u_C(0-)$  或电感电流  $i_L(0-)$  , 根据换路定则确定  $u_C(0+)$  和  $i_L(0+)$  ;

(2) 求时间常数  $\tau$  ;

对RC电路:  $\tau = RC$       对RL电路:  $\tau = L/R$

$R$  为换路后从动态元件 (电容或电感) 两端看去的等效电阻

(3) 利用  $u_C(t) = u_C(0+)e^{-\frac{t}{\tau}}$  或  $i_L(t) = i_L(0+)e^{-\frac{t}{\tau}}$  , 求得  $u_C(t)$  和  $i_L(t)$  , 再利用KCL和KVL及元件的伏安关系求出其他各支路的电压和电流。也可根据  $t = 0 +$  等效电路, 求出其他待求量的初值  $f(0_+)$  , 应用  $f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$  得到所求量。



# 课程小结——一阶动态电路的分析

## 1、动态电路的暂态过程及换路定则

- 暂态过程产生的原因
- 换路定则
- 电路初始值的确定

## 2、一阶电路的零输入响应

- 一阶RC电路的零输入响应
- 一阶RL电路的零输入响应



# 课堂练习

## 第七节 1, 2, 3, 4, 5, 6



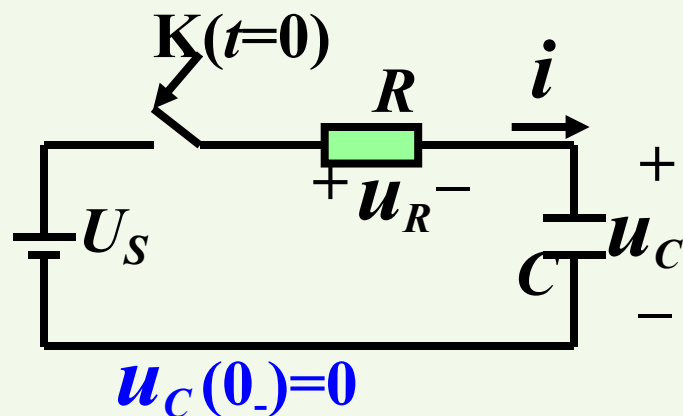
## 2.7.3

# 一阶电路的零状态响应



零状态响应：零初始条件下（动态元件初始储能为零），仅由  $t \geq 0$  时外加于电路的输入（激励）所产生的响应。

## 1. 一阶RC电路的零状态响应



列  $t \geq 0$  时的KVL方程：

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$

一阶非齐次微分方程

解答形式为： $u_C = u'_C + u''_C$

非齐次方程的特解

齐次方程的通解

齐次通解： $u''_C = Ae^{-\frac{t}{RC}}$

非齐次特解： $u'_C = U_S$

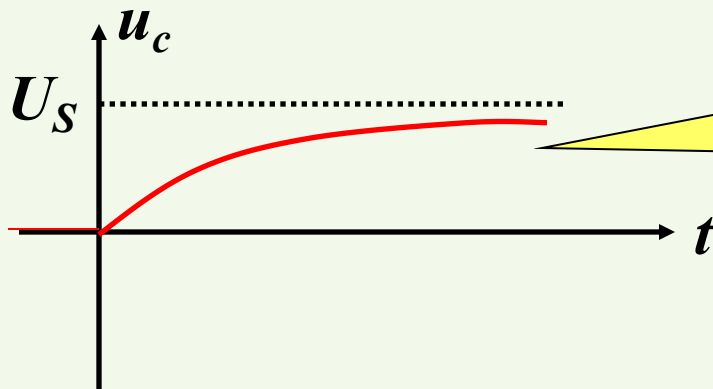
$$\therefore u_C = u'_C + u''_C = U_S + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

由初始条件  $u_C(0_+)=0$  确定  $A$

$$u_C(0_+)=A+U_S=0 \quad \therefore A=-U_S$$



$$u_c = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0)$$



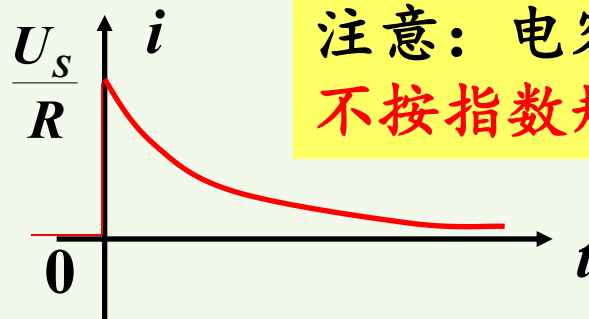
电容电压由初始值0开始按指数规律增长至稳态值 $U_S$ 。

一阶 $RC$ 电路的零状态响应就是一个电源向电容充电的过程。

$$u_c(t) = u_c(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$u_c(\infty)$ : 电容电压的稳态值

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

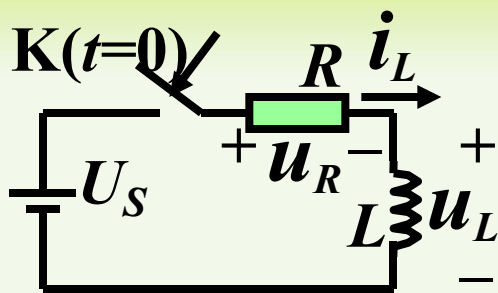


注意：电容的电流并不按指数规律增长！





## 2. 一阶 $RL$ 电路的零状态响应

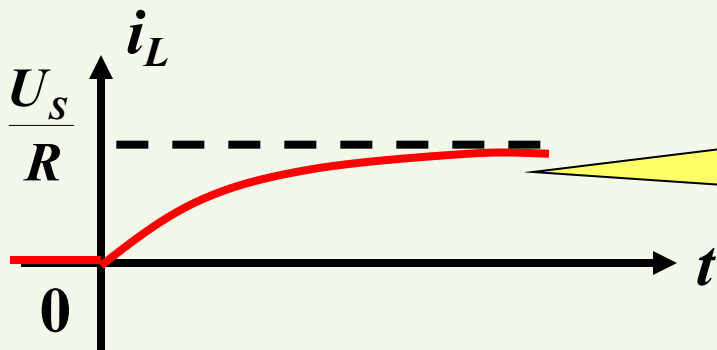


$$i_L(0_-) = 0$$

列写方程

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_S$$

$$i_L = \frac{U_S}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (t \geq 0)$$



电感电流由初始值0开始按指数规律增长至稳态值。

一阶 $RL$ 电路的零状态响应就是一个电源向电感充磁能的过程。

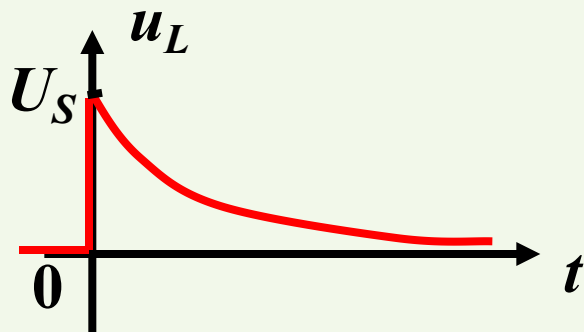
$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$i_L(\infty)$ : 电感电流的稳态值



$$i_L = \frac{U_S}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (t \geq 0)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_S e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t \geq 0)$$



注意：电感的电压并不按指数规律增长！



## 小结:

1. 一阶电路的零状态响应是由电路的**外加激励**所引起的响应。对于**电容的电压及电感的电流**来说，都是一个从初始值0开始按**指数规律**逐渐趋向于它的稳态值的**增长过程**。

$$\text{只有 } u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t > 0)$$

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t > 0)$$

**其它**电压电流的变化过程(表达式)**均不能使用上述公式**。

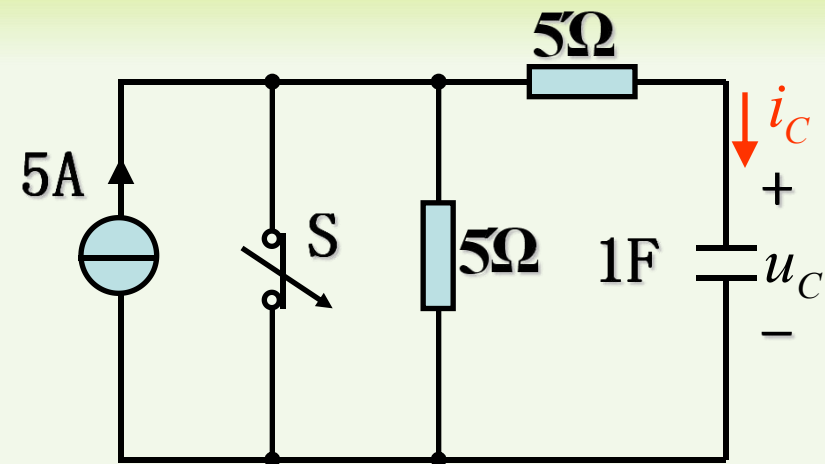
2. 增长快慢取决于时间常数 $\tau$

**RC电路:  $\tau = RC$ , RL电路:  $\tau = L/R$**

**$R$  为换路后从动态元件看进去的等效电阻。**

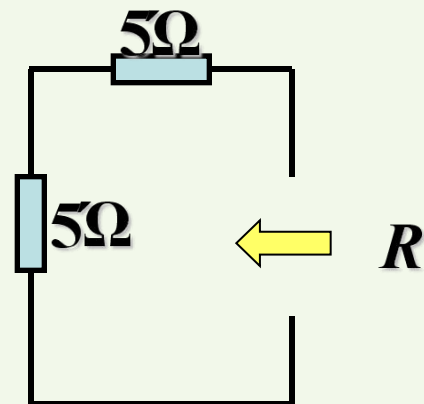
**注意: 计算等效电阻时, 内部的电源要置0, 即电压源用短路代替, 电流源用开路代替。**

例 图示电路中，若 $t=0$ 时开关S打开，求 $u_C(t)$ 和 $i_C(t)$ 。



$$\therefore u_C(\infty) = 5 \times 5 = 25V$$

求 $R$



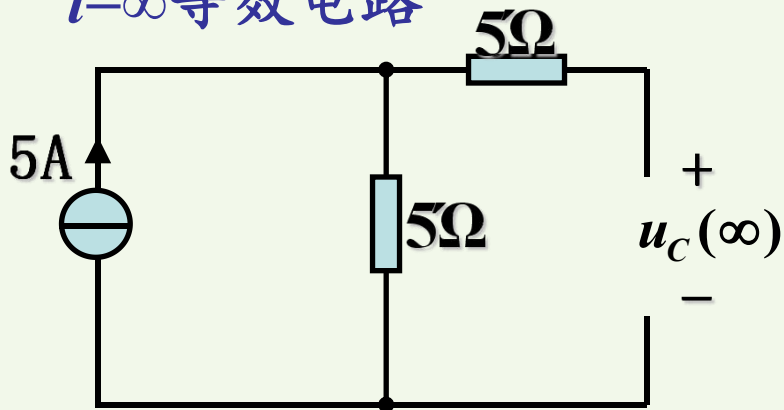
$$R = 5 + 5 = 10\Omega$$

$$\therefore \tau = RC = 10s$$

解： 分析可知所求为零状态响应

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$t=\infty$ 等效电路



$$u_C(t) = 25(1 - e^{-\frac{t}{10}}) V \quad t \geq 0$$

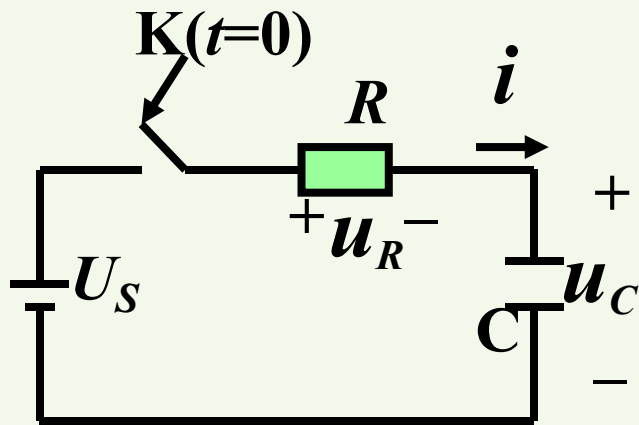
$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{u_C(\infty)}{R} e^{-\frac{t}{10}} = 2.5e^{-\frac{t}{10}} A \quad t \geq 0$$

注意： $i_C(t) \neq i_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

## 2.7.4 一阶电路的全响应和三要素法

### 2.7.4.1 一阶电路的全响应

非零初始状态的一阶电路在电源激励下的响应。



开关动作前电容已充电至  $U_0$

$$u_C(0_-) = U_0$$

列  $t \geq 0$  时的 KVL 方程:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$

一阶非齐次微分方程

解答形式为:  $u_c = u_{cp} + u_{ch}$

非齐次方程的特解

齐次方程的通解

齐次通解:  $u_{ch} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$

非齐次特解:  $u_{cp} = U_S$

$$\therefore u_C = u_{cp} + u_{ch} = U_S + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

由初始条件  $u_C(0_+) = U_0$  确定  $A$

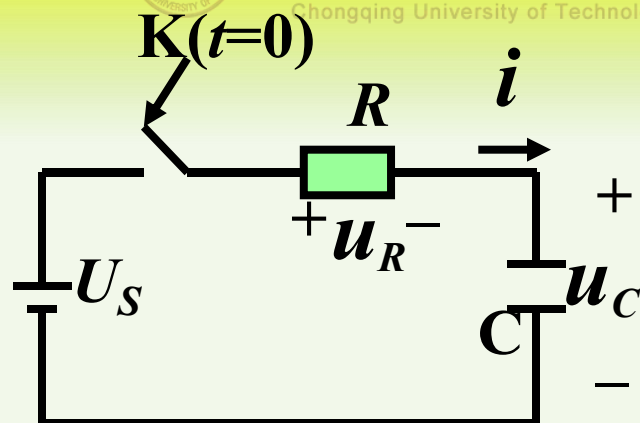
$$u_C(0_+) = A + U_S = U_0 \quad \therefore A = U_0 - U_S$$



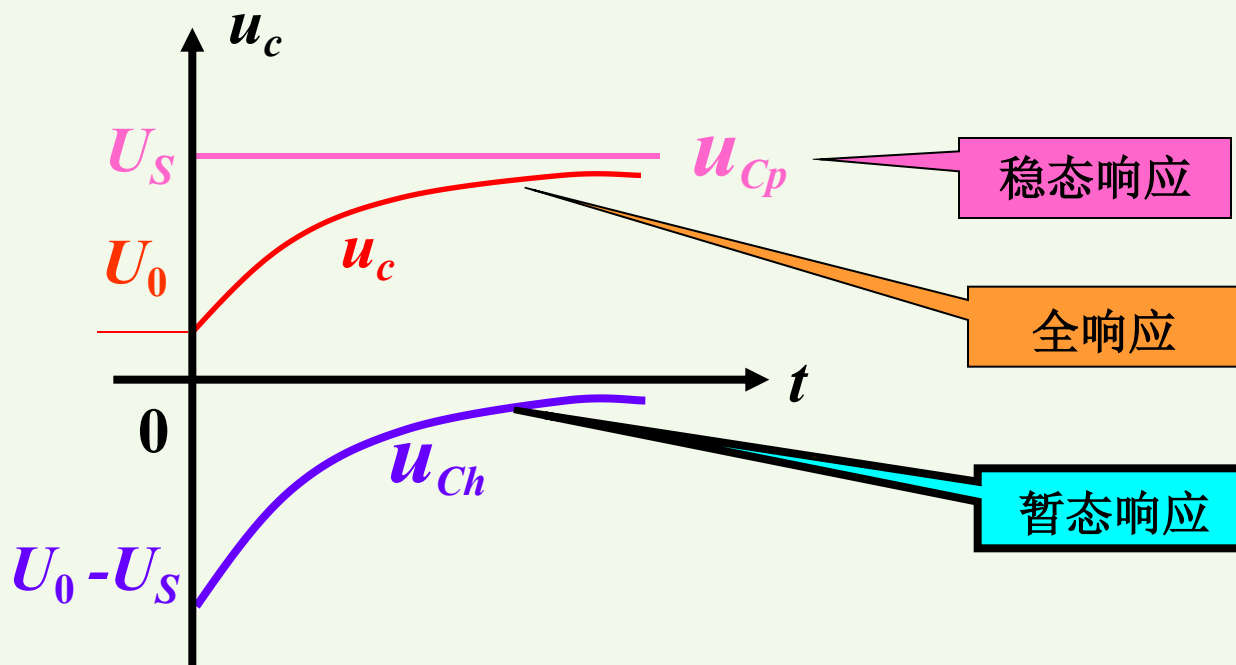
$$u_C(t) = u_{Cp} + u_{Ch} = U_S + (U_0 - U_S) e^{-t/\tau}$$

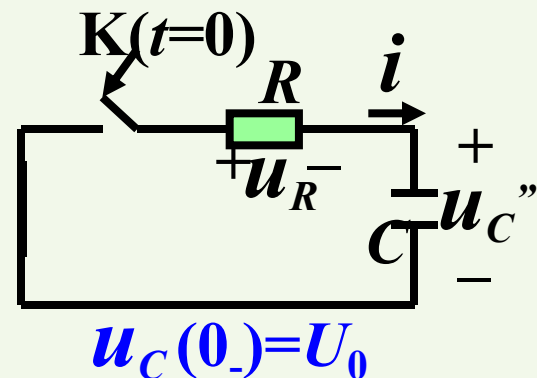
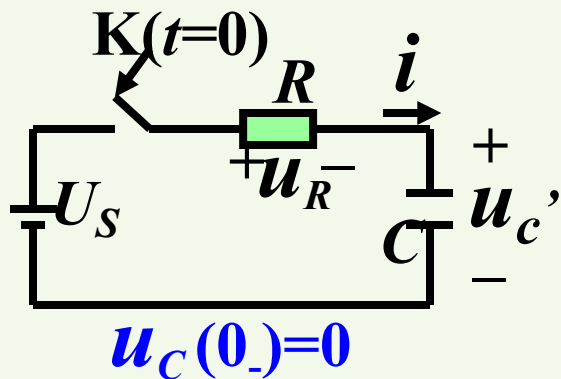
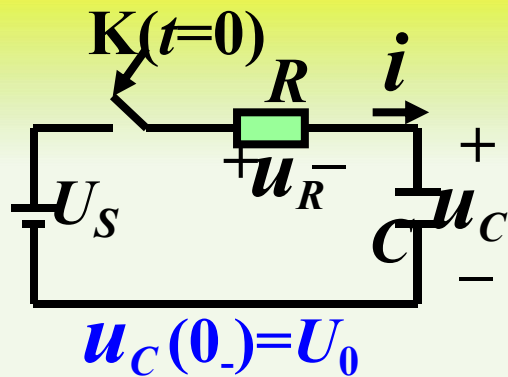
稳态响应

暂态响应



全响应 = 稳态响应 + 暂态响应





全响应也可分为两部分响应之和

$$u_C(t) = u_{Cp} + u_{Ch} = U_S + (U_0 - U_S) e^{-t/\tau}$$

$$= U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

零状态响应

零输入响应

零状态响应  $u_c' = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

零输入响应  $u_c'' = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

全响应 =  $\begin{cases} \text{零状态响应} + \text{零输入响应} \\ \text{稳态响应} + \text{暂态响应} \end{cases}$

## 2.7.4.2 一阶电路的三要素法



一阶电路的数学模型是一阶微分方程，直流激励下解答的一般形式为

$$f(t) = f(\infty) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

稳态响应

暂态响应

令  $t = 0_+$  则  $f(0_+) = f(\infty) + A$

$\Rightarrow A = f(0_+) - f(\infty)$

直流激励下,一阶电路的任一电压、电流都可以写为:

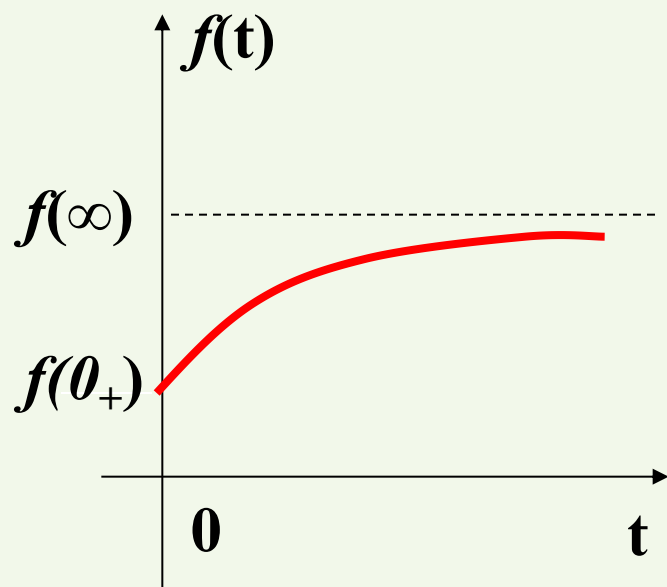
$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

三要素  $\begin{cases} f(\infty) & \text{稳态值} \\ f(0_+) & \text{初始值} \\ \tau & \text{时间常数} \end{cases}$

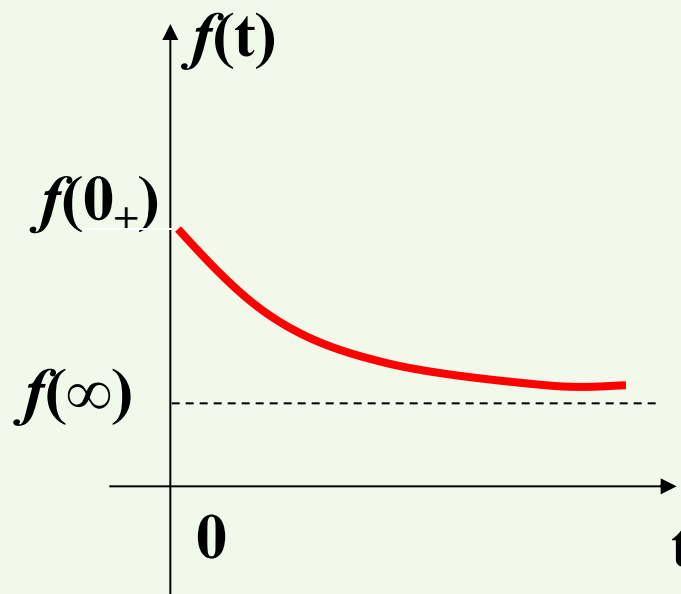




若  $f(0_+) < f(\infty)$



若  $f(0_+) > f(\infty)$



由此可见，直流激励下，一阶电路的任一响应都是从初始值  $f(0_+)$  开始，按指数规律逐渐增长或逐渐衰减到稳态值  $f(\infty)$ 。



## 三要素法的解题步骤为:

(1) 在 $t=0_-$ 时的等效电路中, 求 $u_C(0_-)$ 或 $i_L(0_-)$

原稳态电路

$\left\{ \begin{array}{l} \text{电容} = \text{开路} \\ \text{电感} = \text{短路} \end{array} \right.$

(2) 在 $t=0_+$ 时的等效电路中, 求初始值 $f(0_+)$

暂态电路

$\left\{ \begin{array}{l} \text{电容} = \text{电压源} \\ \text{电感} = \text{电流源} \end{array} \right.$

(3) 在 $t=\infty$ 时的等效电路中, 求稳态值 $f(\infty)$

新稳态电路

$\left\{ \begin{array}{l} \text{电容} = \text{开路} \\ \text{电感} = \text{短路} \end{array} \right.$

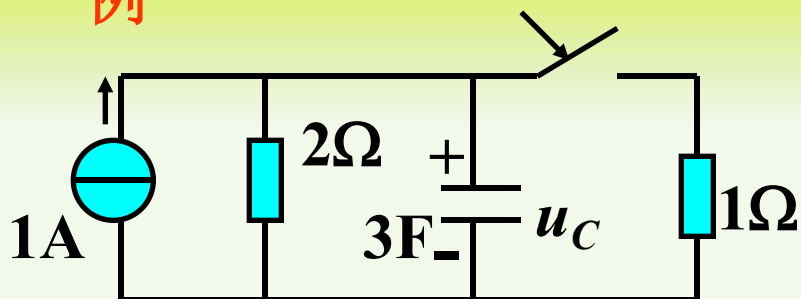
(4) 求时间常数 $\tau$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{对RC电路, } \tau = R_{\text{等效}} C \\ \text{对RL电路, } \tau = L/R_{\text{等效}} \end{array} \right.$

(5) 根据三要素公式求 $f(t)$

$$f(t) = f(\infty) + (f(0_+) - f(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$



例



已知：  $t=0$  时开关闭合，求换路后的  $u_C(t)$ 。

需要计算  $u_C(0_+)$ ,  $u_C(\infty)$  和  $R$

解  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{V}$

$$u_C(\infty) = \frac{2}{2+1} \times 1 = 0.667\text{V}$$

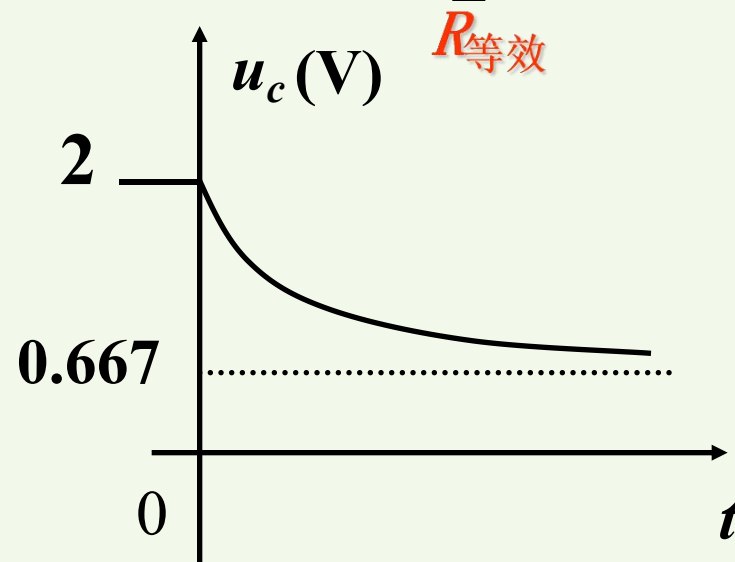
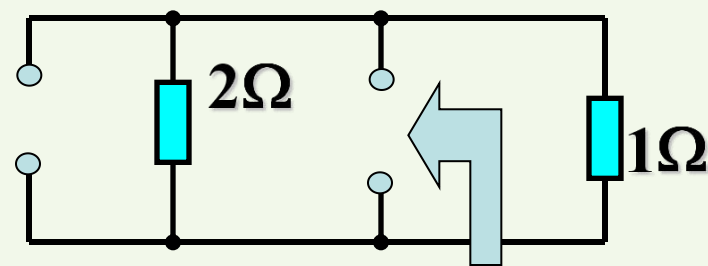
$$R_{\text{等}} = 2 // 1 = \frac{2}{3} \Omega$$

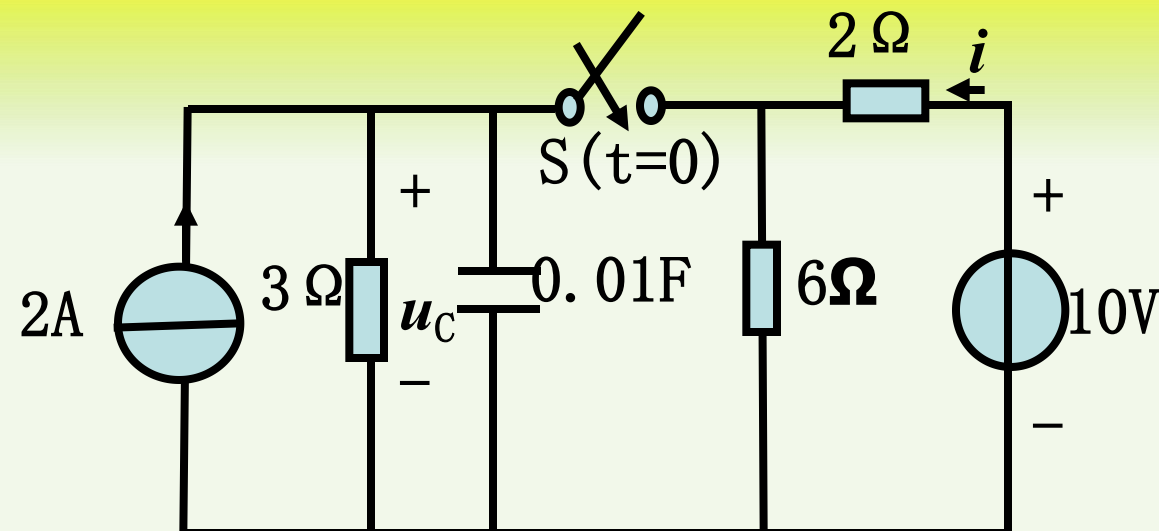
$$\tau = R_{\text{等}} C = \frac{2}{3} \times 3 = 2\text{ s}$$

$$u_C = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 0.667 + (2 - 0.667)e^{-0.5t}$$

$$= 0.667 + 1.33e^{-0.5t} \quad t \geq 0$$





例 求 $t \geq 0$ 时的 $u_C$ 和 $i$ ,  
并绘出波形图。

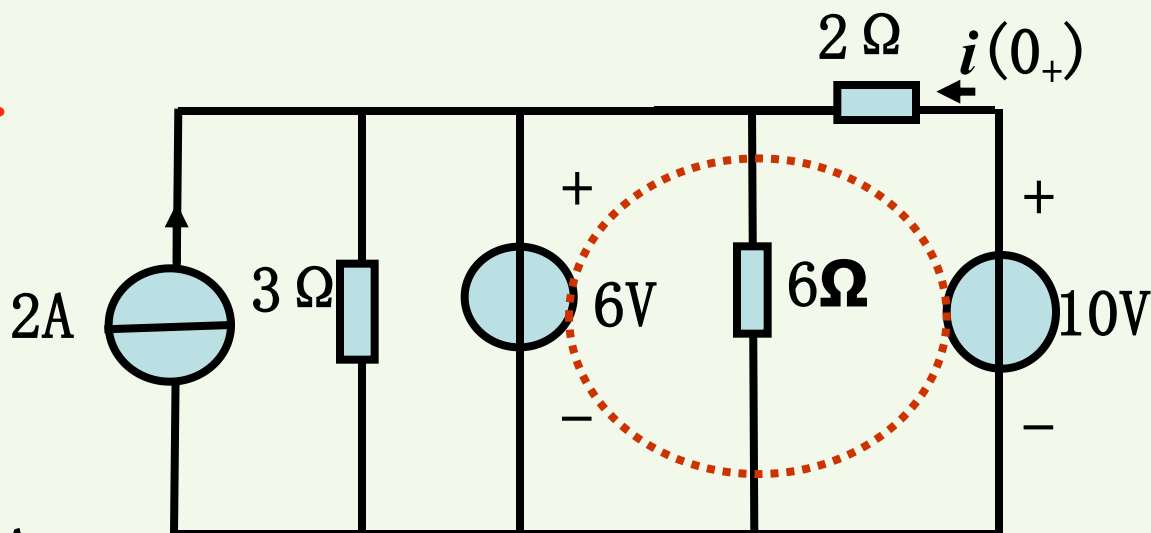
解: (1) 求 $u_C(0_+)$ 和 $i(0_+)$ .

$$u_C(0_-) = 2 \cdot 3 = 6V$$

$$\therefore u_C(0_+) = 6V$$

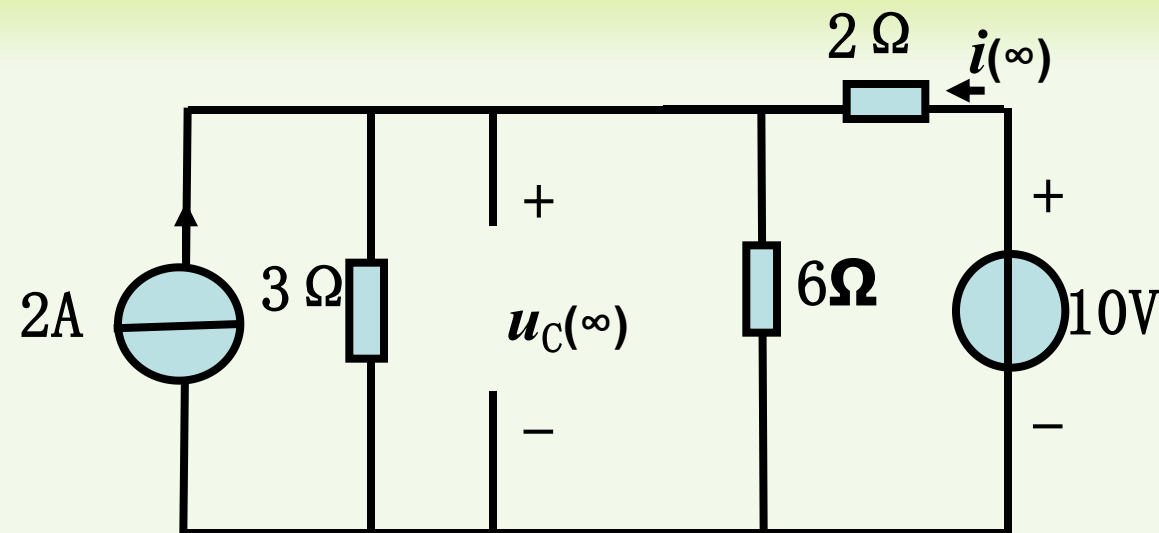
作出 $t=0_+$ 的等效电路

$$\text{求得 } i(0_+) = (10 - 6) / 2 = 2A$$





(2) 求 $u_C(\infty)$ 和 $i(\infty)$ 。作出 $t=\infty$ 等效电路

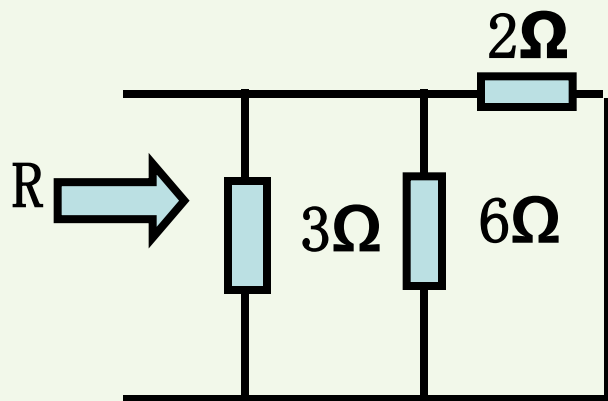


利用电压、电流源等效变换求 $u_C(\infty)$ :

$$\therefore u_C(\infty) = 7V$$

$$i(\infty) = \frac{10 - u_C(\infty)}{2} = 1.5A$$

(3) 求 $\tau$ 。电流源看作断路，电压源看作短路



$$R = 3 // 6 // 2 = 1 \Omega$$

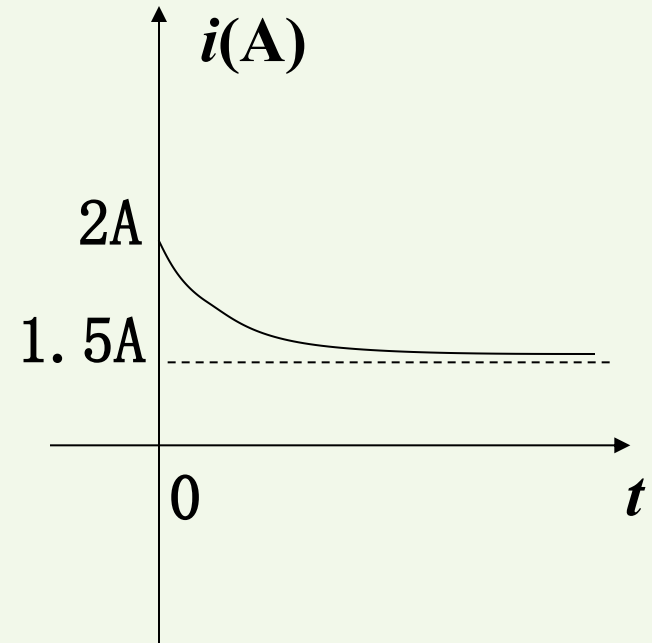
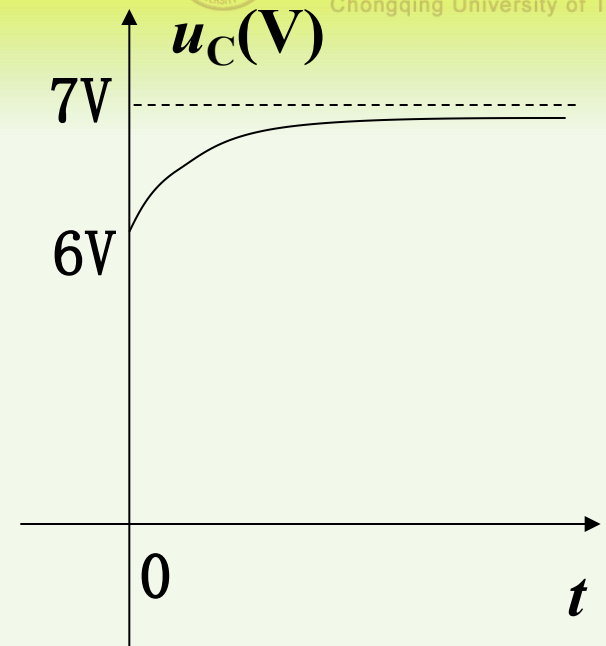
$$\tau = RC = 0.01s$$



(4) 代入三要素公式，可得

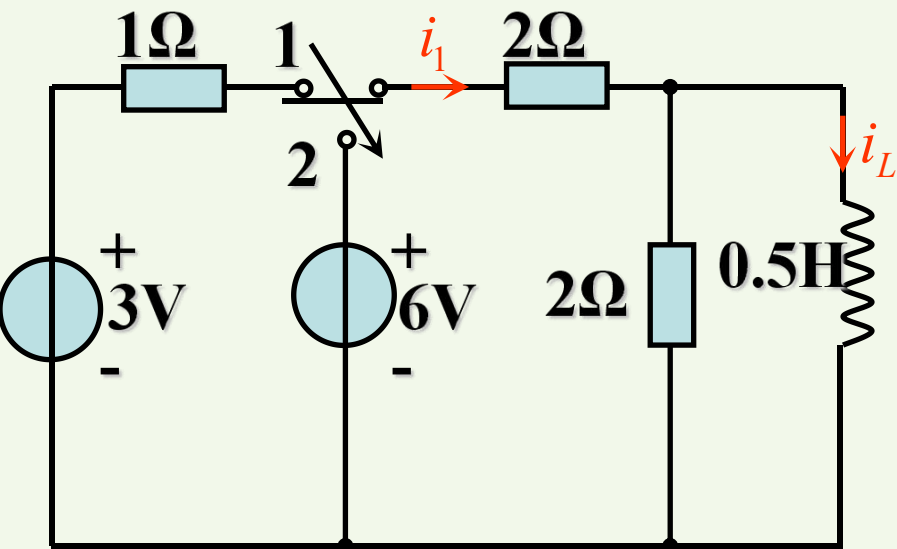
$$\begin{aligned}u_C(t) &= u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\&= 7 + (6 - 7)e^{-100t} \\&= 7 - e^{-100t} \text{ V} \quad t \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i(t) &= i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\&= 1.5 + (2 - 1.5)e^{-100t} \\&= 1.5 + 0.5e^{-100t} \text{ A} \quad t \geq 0\end{aligned}$$





**例** 如图所示电路，电路原已处于稳态，在 $t=0$ 时开关由1扳向2，求 $t \geq 0$ 时  $i_L(t)$ 、 $i_1(t)$ 。



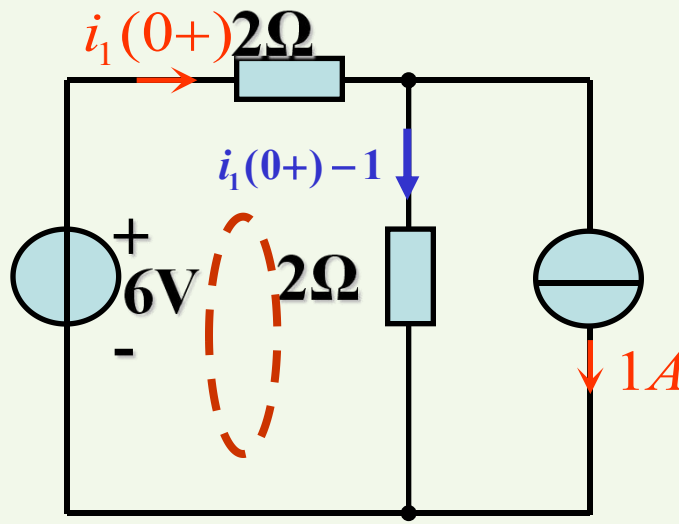
$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

解：(1)求  $i_L(0+)$ 、 $i_1(0+)$

$$i_L(0-) = \frac{3}{1+2} = 1A$$

$$i_L(0+) = i_L(0-) = 1A$$

作 $t=0_+$ 的等效电路  
电感看作电流源



由KVL可得：

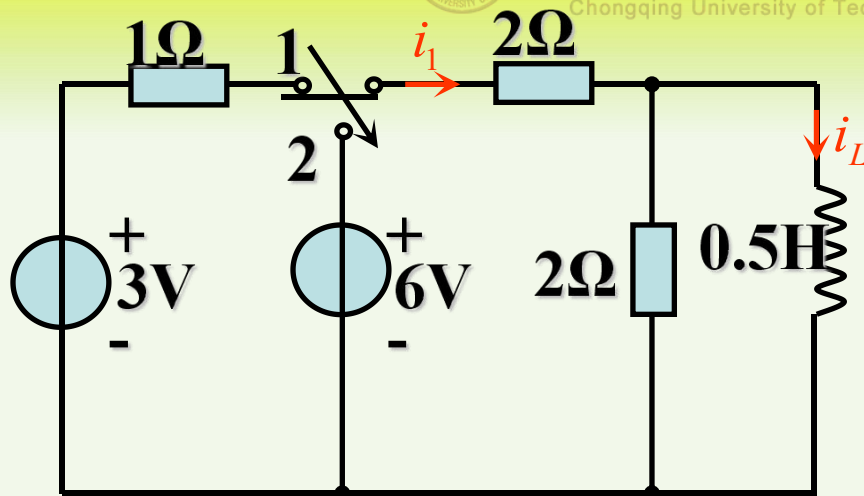
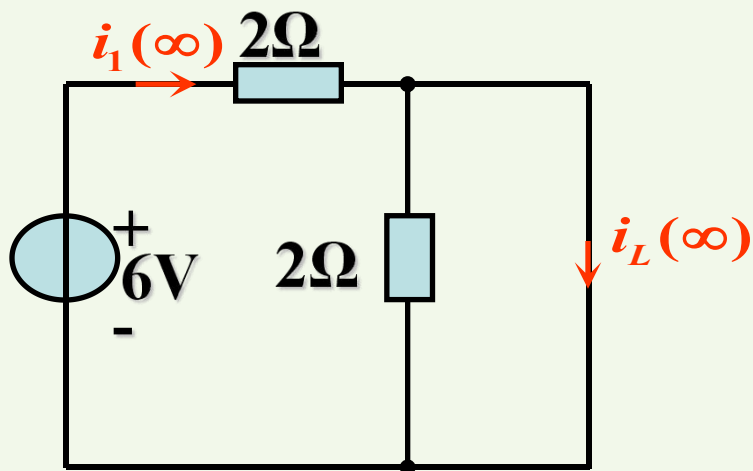
$$2i_1(0+) + 2[i_1(0+) - 1] = 6$$

$$i_1(0+) = 2A$$



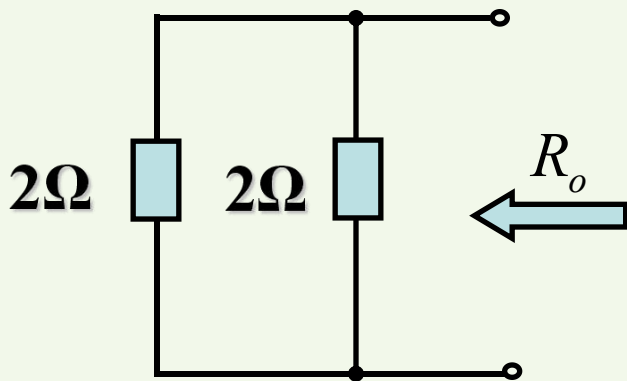
(2) 求  $i_L(\infty)$ 、 $i_1(\infty)$

作  $t=\infty$  等效电路



$$i_1(\infty) = i_L(\infty) = \frac{6}{2} = 3A$$

(3) 求  $\tau$ . 电压源看作短路



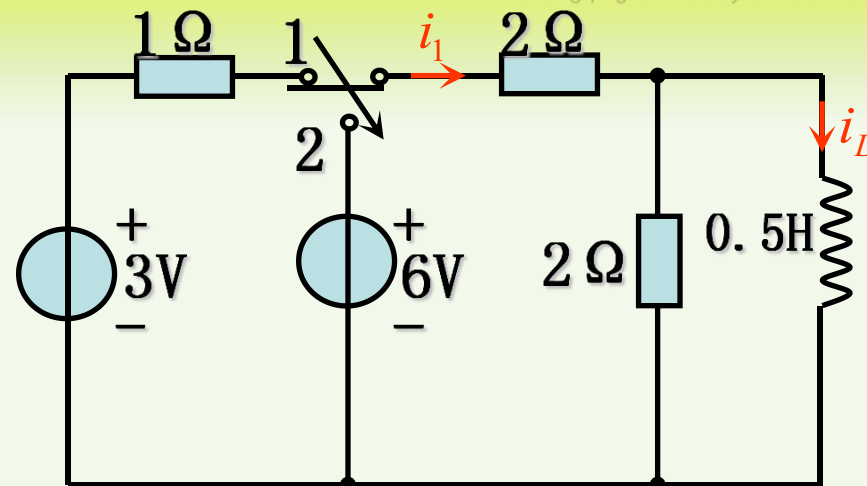
$$R_o = 1\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_o} = 0.5s$$





$$\begin{aligned}i_L(0+) &= 1A & i_1(0+) &= 2A \\i_L(\infty) &= 3A & i_1(\infty) &= 3A \\ \tau &= 0.5s\end{aligned}$$



(4) 代入三要素公式，可得

$$\begin{aligned}i_L(t) &= i_L(\infty) + [i_L(0+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\&= 3 + (1 - 3)e^{-2t} \\&= (3 - 2e^{-2t})A \quad t \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i_1(t) &= i_1(\infty) + [i_1(0+) - i_1(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\&= 3 + (2 - 3)e^{-2t} \\&= (3 - e^{-2t})A \quad t \geq 0\end{aligned}$$



# 课堂练习

## 第七节 9, 10, 11, 12





# 课程小结——一阶动态电路的分析

## 1、一阶电路的零状态响应

- 一阶RC电路的零状态响应
- 一阶RL电路的零状态响应
- 电路初始值的确定

## 2、一阶电路的全响应和三要素法

- 三要素法的解题步骤