

用牛顿环实验测量凸透镜曲率半径的误差分析

周幼华, 王善平, 许 阳

(江汉大学 物理与信息工程学院, 湖北 武汉 430056)

摘 要: 对牛顿环测量凸透镜曲率半径实验中的误差进行了理论分析和半定量分析, 指出了误差的主要来源及相应的处理方法. 对于测量曲率半径 $R > 1\text{m}$ 的平凸透镜, 公式 $R = \frac{D_m^2 - D_n^2}{4(m-n)\lambda}$ 的理论相对误差小于 10^{-8} ; 逐差法可以消除形变带来的系统误差; 由于形变的影响应从第5级以后开始计数, 对于 $R > 1\text{m}$ 的凸透镜要得到小于 10^{-3} 的相对误差, 级数应小于50, 级数差值应大于30. 钠光灯作为光源的系统相对误差为 7.1×10^{-4} .

关键词: 牛顿环; 误差分析; 凸透镜曲率半径

中图分类号: O4-34 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-639X(2002)03-0015-04

1 绪论

牛顿环是由一个曲率半径很大的平凸透镜与一个平面玻璃板接触在一起组成的.

其曲率半径公式:

$$R = \frac{D_m^2 - D_n^2}{4(m-n)\lambda} \quad (1)$$

是在 $R \gg e$ (空气膜厚度), e 可以略去, 即空气膜厚度与凸透镜曲率半径相比可以略去的条件下导出的. 那么在这里略去 e 会引入多大的误差呢?

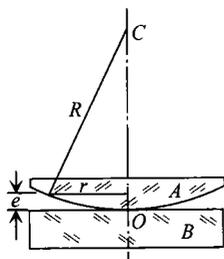


图1 牛顿环示意图

对 $R^2 = r^2 + (R - e)^2$ 微分, 可以得出公式的相对误差;

$$\frac{dR}{R} = \frac{r}{eR} dr + \frac{de}{R} - \frac{de}{e} \quad (2)$$

由 $e = \frac{r^2}{2R} - \frac{e^2}{2R}$ 可以得出公式(1)由于略去了 e 带来的误差:

$$de = \frac{e^2}{2R} \quad (3)$$

(2) 式中略去 e 而带来的 R 的相对误差为:

$$\frac{dR}{R} = \frac{de}{R} = \frac{e^2}{2R^2} \approx \frac{r^4}{8R^4} \quad (4)$$

以实验中常用的杭州光学仪器厂生产的JCD2型读数显微镜为研究对象分析用牛顿环测透镜曲率半径的适用范围, JCD2型读数显微镜行程为5mm, 按最保守的估计, 以 $r = 0.50\text{cm}$ 代入(4)式, 考虑到实验中使用的凸透镜的曲率半径为 m 的量级. 代入(4)式可知理论造成的相对误差不超过 10^{-8} .

由 $R = \frac{D_m^2 - D_n^2}{4(m-n)\lambda}$ 采用标准差可得出 R 的相对误差为;

$$\left(\frac{\delta R}{R}\right)^2 = \left[\frac{\delta(D_m^2 - D_n^2)}{D_m^2 - D_n^2}\right]^2 + \left[\frac{\delta(m-n)}{m-n}\right]^2 + \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda}\right)^2 \quad (5)$$

公式(1), (2), (3), (4), (5)都是沿牛顿环仪对称轴的截面推导出的结果, 推导过程是假定凸透镜的曲面是球面的一部分为前提的. 因此实际测量过程中应尽量满足上述条件.

2 误差产生原因

由(5)式可以得出产生误差的原因有3: 仪器的分辨极限, 确定暗纹的直径引起的; 数级数带来的; 光源的单色性引起的.

收稿日期: 2001-06-12

作者简介: 周幼华(1969-), 男, 湖北嘉鱼人, 讲师, 工程硕士, 主要从事物理实验教学及研究.

2.1 仪器的分辨极限

$$\delta y = \frac{\lambda}{0.61n \sin u} < 1.6 \times 10^{-6} \text{m} \quad (6)$$

比略去 e 带来理论误差高 2 个数量级. 因此对于测量曲率半径很大的平凸透镜, 公式 $R = \frac{D_m^2 - D_n^2}{4(m-n)\lambda}$ 的精度是足够的.

2.2 测量衍射条纹直径带来的误差

影响的因素有: 环的对称性, 螺钉的松紧, 条纹的宽度, 显微镜的放大倍数, 人眼的分辨率.

2.2.1 牛顿环的对称性 要确定某一级条纹的直径首先要确定环的中心位置, 环的中心位置也是 0 级暗纹的中心位置. 人眼的分辨率不超过 0.10 mm, 考虑到读数显微镜的放大倍数 (30), 确定牛顿环的中心位置的误差为:

$$\Delta r = 0.10 \times \sqrt{2} / 30 \text{ mm} \approx 5.0 \times 10^{-6} \text{m}$$

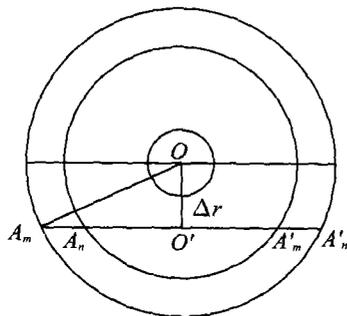


图 2 直径测量误差示意图

由中心位置的误差带来的直径误差为:

$$\frac{\delta D}{D} = 1 - \left[1 - \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \right] \quad (7)$$

对于 $R > 1 \text{ m}$ 的凸透镜, 暗纹的直径在 10^{-3} m 的量级, 则 $\frac{\Delta r}{r}$ 在 10^{-3} 的量级, $\frac{\delta D}{D}$ 在 10^{-6} 的量级.

2.2.2 十字叉丝的位置 在测量过程中, 叉丝的交点放在什么位置也是比较重要的. 对一个本文实验中所采用的牛顿环, 分别把显微镜的十字叉丝对准暗环中间、亮环中间及亮暗环交界处, 进行测量 10 次, 用逐差法处理数据, 其标准误差



图 3 牛顿环测量原理图

依次为 0.001, 0.002, 0.004, 可见测暗环中间误差为最小. 实验中观察到由于背景光等因素的干扰, 亮纹的宽度是暗纹的 3 倍, 分辨暗纹的中心造成的误差小于分辨亮纹中心引起的误差. 因此

选择叉丝对准暗环宽度的几何中分点误差最小.

2.2.3 牛顿环仪 3 个螺钉的松与紧及装置的平稳对测量的影响 在测量过程中很难让叉丝恰好通过环的中心, 这样测得的读数差就不是直径. 在测量过程中, 显微镜的叉丝一般调节成其中一根叉丝与干涉环纹相切. 首先微调 3 个螺钉使条纹中心尽可能的小, 并且与中心对称, 让环刚好不发生错位, 也不存在太大的挤压. 这样环的形变主要是凸透镜的自重引起的, 形变只影响级数较小的条纹与理想情况的吻合. 然后找准中心, 沿中心附近作直线运动, 测量的直径误差由 (7) 式可知可以忽略. 形变的误差大小可通过测量暗纹半径 r_k , 画出 $r_k^2 - k$ 图.

$$r_k^2 = kR\lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

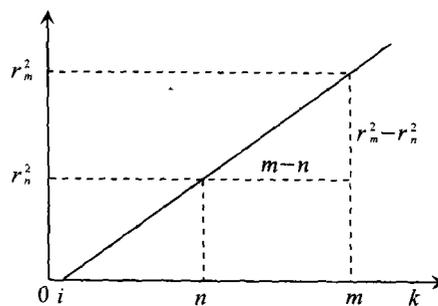


图 4 $r^2 - k$ 曲线

找出与 (8) 式差别较大的级数, 从差别不大的 k 值开始记数, 用 (1) 式计算 R 值. 表 1 是一组实验数据, 实验条件是尽可能满足公式 (1) 的要求, 将环的 3 个螺钉完全松开后, 对准凸透镜和平板玻璃, 然后缓慢均匀地旋 3 个螺钉, 使凸透镜和平板玻璃刚好固定, 并且牛顿环尽可能在中心. X 代表形变小的方向不同级暗纹的半径, Y 代表形变大的方向不同级暗纹的半径, X 和 Y 大致垂直. 旋转手柄将十字叉丝移动到 55 级暗纹中央, 然后倒退记录 0~50 级暗纹直径两端的位置. 操作过程中应始终朝同一方向, 避免齿轮传动带来的系统误差. 表 1 是 0~20 级暗纹的半径与理论值的对照, 理论值是由公式 (8) 计算出的结果. 两个方向的曲率半径由实验给出:

$$R_x = 4.071 \text{m}, \quad R_y = 4.020 \text{m}$$

从表 1 中可以看出实验值比理论值普遍偏大, 形变对级数 $k < 5$ 的暗纹影响较大, 所以记数应从第 5 级开始记数.

从第 5 级开始实验数据符合下式:

$$r_k^2 = 2R(e_k + \Delta R) \quad \frac{\Delta R}{R} < 10^{-6} \quad (9)$$

表1 r_k-k 对照表

| | mm | | | | | | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| K | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| X | 0.792 | 1.736 | 2.294 | 2.794 | 3.189 | 3.546 | 3.848 | 4.151 | 4.441 | 4.679 | 4.938 |
| 理论值 | 0 | 1.549 | 2.191 | 2.683 | 3.097 | 3.464 | 3.794 | 4.098 | 4.382 | 4.647 | 4.898 |
| Y | 0.978 | 1.826 | 2.466 | 2.865 | 3.276 | 3.607 | 3.929 | 4.222 | 4.492 | 4.764 | 5.009 |
| 理论值 | 0 | 1.539 | 2.176 | 2.666 | 3.078 | 3.441 | 3.770 | 4.072 | 4.352 | 4.607 | 4.867 |
| K | | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| X | | 5.174 | 5.408 | 5.615 | 5.824 | 6.018 | 6.222 | 6.412 | 6.580 | 6.761 | 6.937 |
| 理论值 | | 5.273 | 5.366 | 5.585 | 5.796 | 5.961 | 6.184 | 6.387 | 6.572 | 6.752 | 6.927 |
| Y | | 5.206 | 5.466 | 5.678 | 5.872 | 6.085 | 6.277 | 6.466 | 6.648 | 6.818 | 6.999 |
| 理论值 | | 5.104 | 5.331 | 5.549 | 5.758 | 5.960 | 6.156 | 6.345 | 6.529 | 6.708 | 6.883 |

ΔR 是沿环轴向的形变. 因此在上述实验条件下形变对公式 (1) 的影响可以忽略. 实验中对 X, Y 方向 0-50 级暗纹的位置进行了标定, 计算出 X 和 Y 方向的曲率半径分别为 4.07 m,

4.02 m, 在误差范围可以认为是一致的. 并以此作为最可靠的数值计算出理论值. 表2是 X, Y 方向的数值分布对照.

表2 $D_{n+1}^2 - D_n^2$ 数值分布对照

| $D_{n+1}^2 - D_n^2$ (mm ²) | <8.60 | 8.60~9.00 | 9.00~9.20 | 9.20~9.40 | 9.40~9.60 | 9.60~9.80 | 9.80~10.00 | 10.00~10.20 | 10.20~10.40 | >10.40 |
|---|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-------------|-------------|--------|
| X (次) | 4 | 2 | 3 | 6 | 12 | 8 | 5 | 8 | 1 | 2 |
| Y (次) | 2 | 4 | 7 | 9 | 9 | 10 | 7 | 3 | 1 | 0 |
| X+Y (次) | 6 | 6 | 10 | 15 | 21 | 18 | 12 | 11 | 2 | 2 |

从表2中可以看出数值呈正态分布, 因此能利用公式 (1) 增大 $m-n$ 的数值来减小误差.

将实验数据从 25 级为界分为两组, 以平均值作为最可靠的值, 平均标准差作为误差结果如下:

$$0 \sim 25; \quad D_{n+1}^2 - D_n^2 = 9.548 \pm 0.006 \text{ mm}^2$$

$$25 \sim 50; \quad D_{n+1}^2 - D_n^2 = 9.447 \pm 0.056 \text{ mm}^2 \\ = 9.45 \pm 0.06 \text{ mm}^2$$

级数越高测量的误差越大, 计数的最大的级数不宜超过 50.

2.3 数级数带来的误差

级数的误差可定义为:

$$\delta = \frac{\text{人眼的分辨的最小长度}}{\text{放大倍数} \times \text{条纹宽}} \quad (10)$$

人眼的分辨极限取 0.10 mm, 干涉条纹越宽误差越小. 级数从 0 增加到 50 条纹宽由 1.00 mm 减小到 0.10 mm, 级数误差由 3.0×10^{-3} 增大为 3.0×10^{-2} m, 大级数条纹比小级数条纹的精度几乎要小 1 个数量级. 这更进一步证实了通过增大 $m-n$ 的数值来减小误差是有限的.

$$\delta(m-n) = \sqrt{\delta^2 m + \delta^2 n} \quad (11)$$

要得到 $\frac{\delta(m-n)}{m-n}$ 小于 10^{-3} , $m-n$ 应不小于 30,

m 应不大于 50.

2.4 光源的单色性带来的误差

钠光灯黄光有 589.0 nm, 589.6 nm 两条谱线, 取几何平均值 589.3 nm 作为波长.

$$\delta\lambda = \sqrt{0.2^2 + 0.4^2} \text{ nm} = 0.42 \text{ nm}$$

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 7.1 \times 10^{-4} \quad (12)$$

这一误差是系统误差, 也是精度的极限. 对于本文中介绍的凸透镜波长带来的误差

$$\delta R = 2.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

这说明了 R 只需保留到小数点后第三位有效数字.

3 结论

通过上述分析得出以下结论:

1) 测量曲率半径 $R > 1 \text{ m}$ 的平凸透镜, 公式 $R = \frac{D_m^2 - D_n^2}{4(m-n)\lambda}$ 的理论相对误差 $\frac{\delta R}{R} < 10^{-8}$.

2) 选择叉丝对准暗环宽度的几何中分点优于亮环中间和亮暗环交界处.

3) 形变带来的系统误差可由逐差法去掉; 由于形变的影响应从第 5 级以后开始计数.

4) 采用钠光灯作为光源波长带来的系统相

对误差为 $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 7.1 \times 10^{-4}$.

5) 对于 $R > 1 \text{ m}$ 的凸透镜要得到小于 10^{-3} 的相对误差, 级数应小于 50, 级数差值应大于 30. 测量的误差主要由此产生.

参考文献:

[1] 丁慎训, 张孔时. 物理实验 (普通物理实验部分) [M].

北京: 清华大学出版社, 1992.

[2] [美] A. M. 波蒂斯, H. D. 扬. 大学物理实验 伯克利物理实验 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[3] Daryl W P Experiments in physics [M]. John Wiley & Sons (U. S. A) 1985.

[4] 张哲华, 文莲君. 量子力学与原子物理 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1997.

[5] 周幼华, 吴铁山, 许阳. 大学物理实验的微观教学模式及实践 [J]. 物理实验, 2000 (11).

The Error Analysis in the Experiment of Newton Ring

ZHOU You-hua, WANG Shan-pin, XU Yang

(School of Physics & Information Engineering, Jiangnan University, Wuhan 430056, China)

Abstract: The errors and various causes in the experiment of measuring convex lens curvature radius using Newton ring are analyzed and discussed by theory and semi-quantum method. The source of errors and practical methods of treatment are presented. If the lens curvature radius $R > 1 \text{ m}$, the theory fractional errors causing by the formula $R = \frac{D_m^2 - D_n^2}{4(m-n)\lambda}$ are less than 10^{-8} ; the systematic fractional errors causing by deformation can be eliminated by purchase errors method; The start number of Newton's ring should be larger than 5 and less than 50, $m-n$ should be larger 30, if the fractional errors less than 10^{-3} . The light of sodium vapor lamp is less than 7.1×10^{-4} .

Keywords: Newton ring; error analysis; the curvature radius of convex lens