复变函数与积分变换期末模拟题

一、 单选题（共 12 题，48 分）

1、【单选题】 $(\sqrt{3}-i)^5$ =( )（4.0）

A、 $-16(\sqrt{3}-i)$

B、 $-8(\sqrt{3}+i)$

C、 $-16(\sqrt{3}+i)$

D、 $-8(\sqrt{3}-i)$

正确答案： C

解析：因为 $\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$，所以

$$(\sqrt{3}-i)^5=\left(2e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)^5=32e^{-\frac{5\pi}{6}i}=32(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=-16(\sqrt{3}+i)$$ 。

2、【单选题】计算 $(1-i)^{\frac{1}{3}}$，下列结论不正确的是( )（4.0）

A、 $2^{\frac{1}{6}}\left[\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$

B、 $2^{\frac{1}{6}}\left[\cos(\frac{\pi}{12})-i\sin(\frac{\pi}{12})\right]$

C、 $2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$

D、 $2^{\frac{1}{6}}\left[\cos(\frac{\pi}{12})+i\sin(\frac{\pi}{12})\right]$

正确答案： D

解析：因为 $1-i=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$，所以

$$w_k=(1-i)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right]$$，其中 $k=0,1,2$ 。

3、【单选题】计算 $(\sqrt{3}-i)^i$（4.0）

A、 $e^{(2k+\frac{1}{6})\pi}(\cos\ln 2-\sin\ln 2)$

B、 $e^{(2k-\frac{1}{6})\pi}(\cos\ln 2+\sin\ln 2)$

C、 $e^{(2k+\frac{1}{6})\pi}(\cos\ln 2+\sin\ln 2)$

D、 $e^{(2k-\frac{1}{6})\pi}(\cos\ln 2-\sin\ln 2)$

正确答案： C

解析： $(\sqrt{3}-i)^i=e^{iLn(\sqrt{3}-i)}=e^{i(\ln 2+i(-\frac{1}{6}\pi+2k\pi))}=e^{(2k+\frac{1}{6})\pi}(\cos\ln 2+\sin\ln 2)$。

4、【单选题】 函数 $f(z)=x^2-iy$ 在下面哪个点可导( )（4.0）

A、 $z=-\frac{1}{2}+i$

B、 $z=\frac{1}{2}+i$

C、 $z=\frac{1}{2}-i$

D、 $z=1+i$

正确答案： A

解析：因为 $f(z)=x^2-iy$, 所以

$\begin{cases}u=x^2\\v=-y\end{cases}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $\frac{\partial v}{\partial x}=0$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-1$;

显然, 这四个偏导函数在整个复平面上都是连续的;

若 $C-R$ 方程成立, 则 $\begin{cases}2x=-1\\0=-0\end{cases}$, 即 $x=-\frac{1}{2}$;

即只有当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, $f(z)=x^2-iy$ 才满足 $C-R$ 方程。

所以, 函数 $f(z)=x^2-iy$ 只在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上的点可导。

由函数解析的定义可知, 函数 $f(z)=x^2-iy$ 在整个复平面内处处不解析。

5、【单选题】已知 $f(z)=x^2-iy^2$ 在 $z=-1+i$ 处可导, 则 $f'(-1+i)=$ ( )（4.0）

A、 2

B、 -2

C、 1

D、 以上结论都不正确

正确答案： B

解析：由 $f(z)=x^2-iy^2$ 的表达，令

$u=x^2, v=-y^2 \Rightarrow u_x=2x, u_y=0, v_x=0, v_y=-2y$

$f'(z)=u_x+iv_x=2x \Rightarrow f'(-1+i)=-2$ 。

6、【单选题】$z=\sqrt{3}-i$ 辐角主值和绝对值(或模)为[____]（4.0）

A、 主辐角为$-\frac{1}{6}\pi$，绝对值为2

B、 主辐角为$\frac{1}{6}\pi$，绝对值为2

C、 主辐角为$\frac{5}{6}\pi$，绝对值为2

D、 主辐角为$-\frac{7}{6}\pi$，绝对值为2

正确答案： A

解析： $z=x+iy \Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\arg z=\begin{cases} \arctan(y/x), & x>0,\ y\text{任意}, \\ \arctan(y/x)+\pi, & x<0,\ y\geq 0, \\ \arctan(y/x)-\pi, & x<0,\ y<0, \\ \pi/2, & x=0,\ y>0, \\ -\pi/2, & x=0,\ y<0. \end{cases}$$

7、【单选题】函数 $u=x^2-y^2$ 为调和函数，其共轭调和函数为（ ）（4.0）

A、 $v(x,y)=2xy+c$.

B、 $v(x,y)=-2xy+c$.

C、 $v(x,y)=xy+c$.

D、 $v(x,y)=-xy+c$.

正确答案： A

解析：根据柯西-黎曼方程：

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y$$

故而

$$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int 2xdy=2xy+\varphi(x)$$

又因为

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=2y+\varphi'(x)=2y$$

所以

$$\varphi'(x)=0\Rightarrow\varphi(x)=C$$

进而

$$v(x,y)=2xy+C$$

8、【单选题】下列级数中绝对收敛的为 【 】（4.0）

A、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$

B、 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$

C、 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$

D、 $\sum_{n=0}^{\infty}i^n$

正确答案： B

解析：解:因为$i^n=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}+i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$的实部与虚部构成的级数分别为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$都是条件收敛,所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$收敛,但非绝对收敛。

1 因为$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(6+5i)^n}{8^n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{6+5i}{8}\right|^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$是公比$q=\frac{\sqrt{61}}{8}<1$的等比级数,

故$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(6+5i)^n}{8^n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$收敛,从而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$绝对收敛。

1 因为

$$\frac{\cos(in)}{2^n}=\frac{\frac{e^{i(in)}+e^{-i(in)}}{2}}{2^n}=\frac{1}{2}\square\frac{e^{-n}+e^n}{2^n}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2e}\right)^n+\left(\frac{e}{2}\right)^n\right],$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2e)^n}+\left(\frac{e}{2}\right)^n\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n,$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n$ 是公比 $q=\frac{1}{2e}<1$ 的等比级数,故收敛;$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n$ 是公比 $q=\frac{e}{2}>1$ 的等比级数,故发散;从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$ 发散。由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-n}+e^n}{2^n}=\infty$,所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$ 发散。

9、【单选题】 计算 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{100}}\mathrm{d}z$.（ ）（4.0）

A、 $\frac{2\pi i}{99!}$.

B、 $\frac{\pi i}{99!}$.

C、 $\frac{4\pi i}{99!}$.

D、 以上结论都不正确

正确答案： A

解析： $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{100}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{99!}(e^z)^{(99)}\Big|_{z=0}=\frac{2\pi i}{99!}$.

10、【单选题】设函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$ 则 $z=0$ 是 $f(z)$（ ）（4.0）

A、 可去奇点

B、 一级极点

C、 二级极点

D、 本性奇点

正确答案： C

解析：方法一 因为 $\frac{\sin z}{z^3}$ 的奇点为 $z=0$,而

$$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^5}{7!}+\ldots\ (0<|z|<+\infty)$$

所以由极点的定义可知, $z=0$ 是 $\frac{\sin z}{z^3}$ 的二级极点。

方法二 因为 $\frac{\sin z}{z^3}$ 的奇点为 $z=0$,又 $z=0$ 是 z^3 的三级零点;而由 $\sin 0=0$,

$(\sin z)'|_{z=0}=\cos 0=1\neq 0$ 知，$z=0$ 是 $\sin z$ 的一级零点;从而由第五章中的定理得 $z=0$ 是 $\frac{\sin z}{z^3}$ 的二级极点。

11、【单选题】已知周期为 2π 的函数 $f(t)=-t,-\pi<t<\pi$，而 c_n 是 $f(t)$ 的离散频谱，则 $c_{-6}=$( )（4.0）

A、 $\frac{1}{3}i$

B、 $-\frac{1}{3}i$

C、 $\frac{1}{6}i$

D、 $-\frac{1}{6}i$

正确答案： C

解析：离散频谱：$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

因为 $T=2\pi$ 及基频 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$. 所以 $c_{-6}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-t)\mathrm{e}^{6it}\mathrm{d}t=\frac{1}{6}i$

12、【单选题】已知非周期函数 $f(t)=\begin{cases}t,t\in[0,1]\\0,t\notin[0,1]\end{cases}$ 而 $F(\omega)$ 是 $f(t)$ 的连续频谱，计算 $F(1)$ 并化简为 $x+iy$ 的形式（ ）（4.0）

A、 $\cos(1)+\sin(1)-1+i(\cos(1)-\sin(1))$

B、 $\cos(1)-\sin(1)-1+i(\cos(1)-\sin(1))$

C、 $\cos(1)+\sin(1)-1+i(\cos(1)+\sin(1))$

D、 $\cos(1)+\sin(1)+1+i(\cos(1)-\sin(1))$

正确答案： A

解析：连续频谱：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$,

$F(1)=\cos(1)+\sin(1)-1+i(\cos(1)-\sin(1))$

二、 多选题（共 2 题，16 分）

1、【多选题】判定函数 $f(z)=xy^2+ix^2y$ 是否解析的基本步骤是( )（8.0）

A、 因为 $f(z)=xy^2+ix^2y$，所以 $\begin{cases}u=xy^2\\ v=x^2y\end{cases}$；

B、 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy$，$\frac{\partial v}{\partial x}=2xy$，$\frac{\partial v}{\partial y}=x^2$

C、 显然，这四个偏导函数在整个复平面上都是连续的；

D、 若 $C-R$ 方程成立，则 $\begin{cases}y^2=2xy\\ 2xy=-x^2\end{cases}$，即 $x=y=0$；

E、 只有当 $x=y=0$ 时，$f(z)=xy^2+ix^2y$ 才满足 $C-R$ 方程；

F、 所以，函数 $f(z)=xy^2+ix^2y$ 只在点 $z=0$ 处可导。

G、 所以，函数 $f(z)=xy^2+ix^2y$ 只在点 $z=0$ 处解析。

H、 由函数解析的定义可知，函数 $f(z)=xy^2+ix^2y$ 在整个复平面内处处不解析。

正确答案： ABCDEFH

解析：因为 $f(z)=xy^2+ix^2y$，

所以 $\begin{cases}u=xy^2\\ v=x^2y\end{cases}$；则 $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy$，$\frac{\partial v}{\partial x}=2xy$，$\frac{\partial v}{\partial y}=x^2$；

显然，这四个偏导函数在整个复平面上都是连续的；

若 $C-R$ 方程成立，则 $\begin{cases}y^2=2xy\\ 2xy=-x^2\end{cases}$，即 $x=y=0$；

即只有当 $x=y=0$ 时，$f(z)=xy^2+ix^2y$ 才满足 $C-R$ 方程。

所以，函数 $f(z)=xy^2+ix^2y$ 只在点 $z=0$ 处可导。

由函数解析的定义可知，函数 $f(z)=xy^2+ix^2y$ 在整个复平面内处处不解析。

2、【多选题】利用 Laplace 变换求解微分方程 $y''+5y'+4y=2, y'(0)=y(0)=0$。（8.0）

A、 令 $L[y]=Y(s)$,

B、 $L[y']=sY(s)-y(0)=sY(s)$,

C、 $L[y'']=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)$,

D、 因此 $s^2Y(s)+5sY(s)+4Y(s)=\frac{2}{s}$,

E、 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[\frac{2}{s(s+4)(s+1)}]=\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{s}]+\frac{1}{6}L^{-1}[\frac{1}{s+4}]-\frac{2}{3}L^{-1}[\frac{1}{s+1}]$

F、 $y(t)=\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{s}]+\frac{1}{6}L^{-1}[\frac{1}{s+4}]-\frac{2}{3}L^{-1}[\frac{1}{s+1}]=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{-4t}-\frac{2}{3}e^{-t}$

G、 $\mathrm{Res}[Y(s)e^{st},-4]=\mathrm{Res}[\frac{2e^{st}}{s(s+1)},0]=\lim_{s\to-4}\frac{2e^{st}}{s(s+1)}=\frac{1}{6}e^{-4t}$

H、 $\mathrm{Res}[Y(s)e^{st},0]=\mathrm{Res}[\frac{2e^{st}}{s(s+4)(s+1)},0]=\lim_{s\to0}\frac{2e^{st}}{(s+4)(s+1)}=\frac{1}{2}$

I、 $\operatorname{Re}s[Y(s)e^{st},-1]=\operatorname{Re}s[\frac{2e^{st}}{s(s+4)},-1]=\lim_{s\to -1}\frac{2e^{st}}{s(s+4)}=\frac{2}{3}e^{-t}$

J、

$y(t)=\operatorname{Res}[F(s)e^{st},0]+\operatorname{Res}[F(s)e^{st},-1]+\operatorname{Res}[F(s)e^{st},-4]=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{-4t}-\frac{2}{3}e^{-t}$

K、 $y(t)=2\pi i(\operatorname{Res}[F(s)e^{st},0]+\operatorname{Res}[F(s)e^{st},-1]+\operatorname{Res}[F(s)e^{st},-4])$

正确答案： ABCDEFGHIJ

解析：解.令$L[y]=Y(s)$, $L[y']=sY(s)-y(0)=sY(s)$,

$L[y'']=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)$, $s^2Y(s)+5sY(s)+4Y(s)=\frac{2}{s}$,

$Y(s)=\frac{2}{s(s+4)(s+1)}$,

$Y(s)=\frac{2}{s(s+4)(s+1)}=\frac{1}{2s}+\frac{1}{6(s+4)}-\frac{2}{3(s+1)}$

$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[\frac{2}{s(s+4)(s+1)}]=\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{s}]+\frac{1}{6}L^{-1}[\frac{1}{s+4}]-\frac{2}{3}L^{-1}[\frac{1}{s+1}]$

$y(t)=\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{s}]+\frac{1}{6}L^{-1}[\frac{1}{s+4}]-\frac{2}{3}L^{-1}[\frac{1}{s+1}]=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{-4t}-\frac{2}{3}e^{-t}$

或

$\operatorname{Re}s[Y(s)e^{st},-4]=\operatorname{Re}s[\frac{2e^{st}}{s(s+1)},0]=\lim_{s\to -4}\frac{2e^{st}}{s(s+1)}=\frac{1}{6}e^{-4t}$

$\operatorname{Re}s[Y(s)e^{st},0]=\operatorname{Re}s[\frac{2e^{st}}{s(s+4)(s+1)},0]=\lim_{s\to 0}\frac{2e^{st}}{(s+4)(s+1)}=\frac{1}{2}$

$\operatorname{Re}s[Y(s)e^{st},-1]=\operatorname{Re}s[\frac{2e^{st}}{s(s+4)},-1]=\lim_{s\to -1}\frac{2e^{st}}{s(s+4)}=\frac{2}{3}e^{-t}$

$y(t)=\operatorname{Res}[F(s)e^{st},0]+\operatorname{Res}[F(s)e^{st},-1]+\operatorname{Res}[F(s)e^{st},-4]=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{-4t}-\frac{2}{3}e^{-t}$

三、 填空题 （共 8 题，36 分）

1、【填空题】幂级数$\sum\frac{n}{2^n}z^n$的收敛半径为 ____（4.5）

正确答案：

第 1 空:2

解析： $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{n}{2^n}\right|}}=2$

2、【填空题】计算$Ln(-i)$，其虚部为(____)πi，实部为(____)

（4.5）
正确答案：
第 1 空:

2k-1/2;-1/2+2k

第 2 空:

0

解析： $\mathrm{Ln}(-i)=\ln|-i|+i[\arg(-i)+2k\pi]=0+i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)=(2k-\frac{1}{2})\pi i$

3、【填空题】已知函数$f(z)=x^2+xy+i(x^2-xy)$，计算导数值并表示成为$x+iy$
$f'(0)=$（____）（4.5）

正确答案：
第 1 空:0

解析：令$u=x^2+xy, v=x^2-xy$ 故$u_x=2x+y, u_y=x, v_x=2x-y, v_y=-x$
根据柯西黎曼方程，得到
$2x+y=-x, y=-2x+y, \Rightarrow x=0, y=0$
因此
$f'(0)=u_x+iv_x=0$

4、【填空题】设曲线C为正向圆周$C:|z|=\frac{3}{2}$，则$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$=____（4.5）

正确答案：
第 1 空:0

解析：因为
$$\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}=\frac{1}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$$
在积分曲线$C:|z|=\frac{3}{2}$的内部有两个奇点$z=\pm i$，所以由复合闭路定理及柯西积分

公式,在圆周 $C:|z|=\frac{3}{2}$ 的内部分别以 i 、 $-i$ 为圆心作圆周 C_1 、 C_2 (使得 C_1 、 C_2 互不相交也互不包含),则

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}=\oint_C \frac{1}{(z+i)(z-i)(z^2+4)}dz$$

$$=\oint_{C_1} \frac{\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}}{z-i}dz+\oint_{C_2} \frac{\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}}{z+i}dz$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}\bigg|_{z=i}+2\pi i\cdot\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}\bigg|_{z=-i}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{2i\cdot 3}+2\pi i\cdot\frac{1}{-2i\cdot 3}=0$$

5、【填空题】已知函数 $f(z)=\overline{z}$ 和曲线 $z=t+it, t\in[0,1]$ 方向从 $z(0)\to z(1)$ 则 $\oint_C f(z)dz$ 并将其化简为 $x+iy$ 的形式=____

（4.5）

正确答案:

第 1 空:

1

解析: $\oint_C f(z)dz=\int_0^1 (1+i)(1-i)tdt=1$

6、【填空题】将函数 $f(z)=z\cos\frac{1}{z-1}$ 在 $z=0$ 中展开成形如 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-1)^n$ 的洛朗级数,则 $6!a_{-5}=$____（4.5）

正确答案:

第 1 空:-1

解析: 因为

$$f(z)=z\cos\frac{1}{z-1}=z\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\frac{1}{6!(z-1)^6}+\cdots\right)$$

$$=z-\frac{z}{2!(z-1)^2}+\frac{z}{4!(z-1)^4}-\frac{z}{6!(z-1)^6}+\cdots$$

$$=z-\frac{z-1+1}{2!(z-1)^2}+\frac{z-1+1}{4!(z-1)^4}-\frac{z-1+1}{6!(z-1)^6}+\cdots$$

$$=z-\frac{1}{2!(z-1)}-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^3}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\frac{1}{6!(z-1)^5}-\frac{1}{6!(z-1)^6}+\cdots$$ 所以

$$a_{-6}=-\frac{1}{6!}$$

7、【填空题】设函数 $f(z)=2ze^{\frac{1}{z-1}}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),1]=$____。（4.5）

正确答案：
第 1 空:3

解析：因为 $z=0$ 是函数 $f(z)=2ze^{\frac{1}{z-1}}$ 的洛朗展开为

$$f(z)=2(z)e^{\frac{1}{z-1}}=2(z)\cdot\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots\right),$$

$$=2(z-1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots\right),$$

$$=2\cdot((z-1)+1+\frac{1}{2!(z-1)}+\frac{1}{3!(z-1)^2}+\cdots)+2(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots),$$

$$=\cdots+2(1+\frac{1}{2!})\,\frac{1}{z-1}+\cdots,$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{Res}[f(z),0]=3$$

8、【填空题】$z=\dfrac{25-25i}{3-4i}$ 的实部为____。（4.5）

正确答案：
第 1 空:7

解析：$z=\dfrac{25-25i}{3-4i}=-\dfrac{(25-25i)(-3-4i)}{25}=7+i$